

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



**DISEÑO DE ECUACIONES DE FILTRADO Y CONTROL ÓPTIMO  
RISK-SENSITIVE Y  $H_2/H - \infty$  PARA SISTEMAS  
ESTOCÁSTICOS NO LINEALES**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
DOCTOR EN INGENIERÍA FÍSICA INDUSTRIAL

PRESENTA

SONIA GUADALUPE ANGUIANO ROSTRO

San Nicolás de los Garza, N. L.

Julio de 2021

Diseño de ecuaciones de filtrado y control óptimo Risk-Sensitive y  $H_2/H-\infty$  para sistemas estocásticos no lineales

Los miembros del comité aprueban las tesis de doctorado de  
Sonia Guadalupe Anguiano Rostro.

Dra. María Aracelia Alcorta García \_\_\_\_\_

Dra. Nora Elizondo Villarreal \_\_\_\_\_

Dr. Gerardo Maximiliano Méndez \_\_\_\_\_

Dr. César Elizondo González \_\_\_\_\_

Dr. Pablo Cesar Rodríguez Ramírez \_\_\_\_\_

Diseño de ecuaciones de filtrado y control óptimo  
Risk-Sensitive y  $H_2/H - \textit{infinito}$  para sistemas  
estocásticos no lineales

Sonia Guadalupe Anguiano Rostro

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

División de Estudios de Posgrado

30 de julio de 2021

# Dedicada a:

Principalmente a Dios que ha estado conmigo en todo momento para guiarme por el buen camino, porque no me deja caer.

A mi esposo Felipe Cuellar González, a mis hijos Alexa Cuellar Anguiano y José Eli Cuellar Anguiano, a mis padres Ana María Rostro Puente e Ignacio Anguiano López que en paz descansen; quienes me brindaron su apoyo incondicional en todo momento, por ser pacientes, por darme esa motivación para seguir adelante.

Gracias por creer siempre en mí, por cada meta que me ayudan a cumplir.

No ha sido sencillo el camino, pero juntos con la ayuda de Dios, a sus aportes, a su amor, a su inmensa bondad, hemos salido adelante.

Los amo familia.

# Agradecimientos

A la Dra. María Aracelia Alcorta García, por su asesoría y comprensión; por no dejarme rendir, por su insistencia en cumplir esta meta.

Al Dr. Edgar Martínez Guerra por su apoyo para concluir el Doctorado.

A los miembros del Comité de Tesis por sus valiosas recomendaciones para mejorar la calidad de la tesis.

A los miembros del Comité doctoral del DIFI, por su apoyo durante todo el doctorado.

A la MA Carmen del Rosario de la Fuente García, quién como directora de la FCFM me brindó su apoyo durante el primer semestre del doctorado.

A la MA Patricia Martínez, quién como directora de la FCFM me brindó su apoyo durante el resto del doctorado.

Al Dr. Atilano Martínez Huerta, director actual de la FCFM, a la Dra. Argelia Vargas Moreno por el apoyo para la publicación de uno de los artículos que se presentan en esta Tesis.

A mi familia, y en especial a mis padres Ana María Rostro Puente e Ignacio Anguiano López (QEPD), por su incondicional apoyo y ayuda, a mi

esposo Felipe de Jesús Cuellar González, por su ayuda y comprensión; a mis hijos Alexa Fernanda y José Eli Cuellar Anguiano, por toda su paciencia, por el tiempo que no les pude dedicar.

Al MC Alfredo Alanís Durán, a la MC Lilia López y a la MC Lilia Guadalupe Figueroa por su apoyo en la carga académica y orientaciones.

A mis jefes en la FCQ: Zita Huerta, Eli González, por siempre darme el apoyo para la carga académica.

A la UANL por su apoyo económico.

A mis compañeros del DIFI: Darío, Jorge, Felipe, Pedro, Juan José, Mauricio, Yazmín, Mario, Diana, Paulina que me apoyaron en todo momento.

A mi hermano Edgar Anguiano, a mi prima (hermana) Judith Marcial, a tía Ofelia Rostro (QEPD) porque siempre insistieron en que terminara este proyecto.

A mis compañeras de la FCQ (Karla Guajardo, Daniela Bacre, Adriana Camacho y Lilian Reynosa) por siempre estar al pendiente de mis avances.

En general, agradezco a toda mi familia (tíos, primos, cuñados, sobrinos) por el apoyo que siempre me brindaron para concluir esta tesis.

## Notación

$A$	Evento.
$P(A)$	Probabilidad del evento $A$ .
$\Omega$	Espacio muestral.
$\emptyset$	Evento imposible o conjunto vacío.
$\Sigma$	$\sigma$ -álgebra.
$\cup$	Unión de conjuntos.
$\cap$	Intersección de conjuntos.
$\mathbf{B}$	Álgebra de Borel.
$X$	Vector aleatorio.
$x_i$	Componentes del vector aleatorio $X$ .
$P_X$	Distribución de la variable aleatoria $X$
$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ (n veces).
$F(X)$	Función de distribución de $X$ .
$f(x)$	Función de densidad de probabilidad de $X$ .
$E(X), m_X$	Valor esperado de $X$ o esperanza matemática.
$E(X Y)$	Esperanza condicional de $X$ dada $Y$ .
$K_X$	Matriz de covarianza.
$\lambda$	Vector de variables reales.
$X^T$	Trasposición del vector $X$ .
$\mu_X$	Valor esperado de $X$ .

## Continuación de la Notación

$\ X\ $	Norma del vector $X$ .
$\nu(t)$	Intensidad del ruido blanco.
$\delta(t)$	Función delta de Dirac.
$X_t^0$	$X_t - m_t$ .
$W(t)$	Proceso de Wiener.
$\omega(t)$	Realizaciones de $W(t)$ .
$K_w(t_1, t_2)$	Covarianza del proceso de Wiener.
$V$	Ruido blanco.
$u$	Entrada de control.
$u^*$	Ley de control óptima.
$Y(t)$	Proceso de salida.
$W_1(t), W_2(t)$	Procesos de Wiener.
$RS$	Risk-Sensitive
$(M) = x_1$	Monocitos
$(M_\phi) = x_2$	Macrófagos
$A_{s1}, A_{s2}$	Puntos de ajuste para $x_1$ y $x_2$ .
$\epsilon$	Coeficiente del término de difusión en la ecuación
$\lambda$	Tasa de producción de (M)
$\lambda_1$	Nivel de atenuación para problema de optimización
$dW(t) \in L_2^p$	Término de difusión en e estado dinámico.
$\mu, \phi$	<sup>5</sup> Parámetros del sistema
$err_1, err_2$	Diferencia entre el estado y los puntos de ajuste
$err_1 \%, err_2 \%$	Cociente de $err_i$ como $A_{s_i}, i = 1, 2$ .



# Resumen

Algoritmos de filtrado y control aplicando el método Risk-sensitive y  
comparación con otros métodos

Publicación No. -----

Sonia Guadalupe Anguiano Rostro

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Profesores asesores: Dra. María Aracelia Alcorta García

Junio, 2011

En la presente tesis se presentan los trabajos obtenidos como los algoritmos del filtrado sub-óptimo risk-sensitive para sistemas polinomiales de tercer grado con observaciones lineales; con un parámetro de intensidad, multiplicando al término de difusión en las ecuaciones de estado y observaciones; la función de costo cuadrático exponencial a ser minimizada; se obtienen las ecuaciones de filtrado sub-óptimo risk-sensitive y son aplicados a un péndulo con fricción, tales ecuaciones se comparan con otros métodos (Polinomial de tercer grado y Kalman-Bucy), comprobando la eficacia del método risk-sensitive. También se trabaja con los algoritmos del controlador óptimo risk-sensitive para sistemas polinomiales de primer grado con un parámetro de intensidad, multiplicando al término de difusión en

las ecuaciones de estado y observaciones; la función de costo cuadrático-exponencial a ser minimizada; a través de una aplicación se comprueba la eficacia del método risk-sensitive en comparación con el método lineal cuadrático para diferentes valores del parámetro  $\epsilon$ . Se trabaja también con los algoritmos del control óptimo risk-sensitive para sistemas polinomiales de segundo y tercer grado y parámetros de intensidad multiplicando al término de difusión en la ecuación del estado. Para los sistemas de segundo grado se realiza una aplicación a una tanque reactor de agitado permanente y en los sistemas polinomiales de tercer grado se realiza la aplicación sobre un satélite monoxial, en ambos casos se verifica la eficacia del método risk-sensitive en comparación con el método tradicional para diferentes valores del parámetro  $\epsilon$ . Los algoritmos presentados en este trabajo, son obtenidos matemáticamente y su eficacia es mostrada mediante simulación usando Simulink en *MatLab* 7. También se presentan los algoritmos del control sub óptimo RS híbrido para sistemas estocásticos de primer grado, con un parámetro de intensidad, multiplicando al término de difusión en las ecuaciones de estado y observaciones; la función de costo cuadrático exponencial a ser minimizada, se aplican dichos algoritmos a la población de monocitos ( $M$ ) y macrófagos ( $M_\phi$ ) que se generan a partir de una célula progenitora mieloide común en la médula ósea, con un

parámetro  $\lambda$  que representa el índice de producción de monocitos ( $M$ ); la eficacia de estos algoritmos son obtenidos matemáticamente y su eficacia es mostrada mediante la simulación usando Scilab.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>13</b>
1.1. Introducción . . . . .	13
1.2. Antecedentes . . . . .	14
1.3. Motivación . . . . .	18
1.4. Aportaciones . . . . .	19
1.4.1. Aplicación de los Algoritmos de Filtrado Sub-Óptimos para Sistemas Estocásticos de Tercer Grado . .	19
1.4.2. Controlador Óptimo RS para Sistemas Polinomiales Estocásticos de Primer Grado . . . . .	20
1.4.3. Control Óptimo RS para Sistemas Polinomiales Estocásticos de Segundo Grado . . . . .	21
1.4.4. Control Óptimo RS para Sistemas Polinomiales de Tercer Grado . . . . .	22

1.4.5. Control estocástico RS sub óptimo Híbrido $H_2/H_\infty$ para sistemas polinomiales de primer grado . . . . .	23
1.5. Organización de la Tesis . . . . .	25
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>27</b>
2.1. Probabilidad y Estadística . . . . .	27
2.1.1. Variables aleatorias . . . . .	27
2.2. Integrales de Ito . . . . .	38
2.3. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas . . . . .	40
2.4. Problema de Filtrado . . . . .	41
2.5. Control Óptimo . . . . .	44
2.5.1. Planteamiento del problema . . . . .	44
2.5.2. Principio Máximo de Pontryagin . . . . .	46
2.5.3. Método de Programación Dinámica . . . . .	47
2.5.4. Ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman . . . . .	49
2.6. Control Óptimo RS . . . . .	52
2.7. Problema de Control Óptimo Estocástico RS . . . . .	52
2.8. Control híbrido $H_2/H_\infty$ . . . . .	55
<b>3. Aplicación de los Algoritmos de Filtrado Sub-Óptimos para Sistemas Estocásticos de Tercer Grado</b>	<b>59</b>

3.1. Planteamiento del Problema de Filtrado. . . . .	59
3.2. Filtro Óptimo RS . . . . .	64
3.3. Aplicación . . . . .	67
<b>4. Controlador Óptimo RS para Sistemas Polinomiales Estocásticos de Primer Grado</b>	<b>75</b>
4.1. Problema del controlador óptimo RS . . . . .	75
4.1.1. Planteamiento del problema . . . . .	75
4.1.2. Principio de separación para sistemas polinomiales	78
4.1.3. Solución al problema de Control Óptimo RS . . . .	79
4.2. Aplicación . . . . .	81
4.2.1. Controlador óptimo estocástico RS . . . . .	81
4.2.2. Controlador Estocástico Lineal Cuadrático . . . . .	84
<b>5. Control Óptimo RS para Sistemas Estocásticos de Segundo Grado</b>	<b>90</b>
5.1. Regulador Óptimo RS para sistemas polinomiales bilineales	90
5.2. Aplicación . . . . .	93
<b>6. Control Óptimo RS para Sistemas Polinomiales de Tercer Grado</b>	<b>100</b>

6.1.	Regulador óptimo RS para el estado polinomial de tercer grado . . . . .	100
6.2.	Aplicación Satélite Monoaxial . . . . .	104
<b>7.</b>	<b>Control sub-óptimo estocástico RS híbrido <math>H_2/H_\infty</math> para sistemas polinomiales de primer grado</b>	<b>113</b>
7.1.	Planteamiento del problema . . . . .	113
7.2.	Control sub óptimo RS híbrido $H_2/H_\infty$ . . . . .	113
7.2.1.	Aplicación . . . . .	116
7.2.2.	Descripción del modelo . . . . .	116
7.2.3.	Aplicación . . . . .	121
<b>8.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>131</b>
<b>9.</b>	<b>Trabajo futuro</b>	<b>134</b>

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Introducción

En este trabajo se presentan casos particulares donde los procesos presentan disturbios los cuales son provocados por ruidos presentes en procesos químicos, mecánicos, etc. Estos disturbios pueden afectar el proceso y en consecuencia los resultados del mismo; los disturbios se presentan con la forma particular de ruidos blancos Gaussianos en este trabajo y se desea eliminarlos o minimizarlos. Este aspecto de la calidad es estudiado por la teoría de control para procesos estocásticos y en específico, por la teoría de filtrado. En esta tesis se desarrollan las ecuaciones de filtrado sub-óptimo y control óptimo partiendo de la ecuación de programación dinámica Hamilton Jacobi Bellman (HJB), el cual ofrece las condiciones mediante



las cuales se podrá minimizar el error. Y también se trabaja con el controlador óptimo RS en el cual se minimiza el error, mediante las ecuaciones de un estimado RS y se encuentra el control óptimo RS.

## 1.2. Antecedentes

La presente tesis presenta los algoritmos de filtrado y control óptimos para sistemas polinomiales, entonces, aquí se presentan algunos antecedentes sobre el filtrado y control.

Dado que el filtrado óptimo lineal se obtuvo por Kalman y Bucy en los 60's, numerosos trabajos se basan en él, véase, por ejemplo [77], [4], [34], [5], [113], de la variedad de todos ellos. El modelo del filtrado determinístico introducido por Mortensen [12] ofrece una alternativa a la teoría estocástica de filtrado. En este modelo, los errores en el estado dinámico y de las observaciones se modelan como "funciones con perturbaciones" determinísticas, y un error del criterio de costo exponencial media-cuadrada que se reduce al mínimo. Las condiciones especiales se dan para la existencia, la continuidad y la acotación de  $f(X(t))$  en la ecuación del estado, que se considera no lineal, y la función lineal  $H(X(t))$  en la ecuación de observación. Un concepto del estimador estocástico RS, introducido más recientemente por McEneaney [36], lo que se refiere un sistema dinámico donde  $f(X(t))$  es

una función no lineal, observaciones lineales y la existencia de parámetros  $\tilde{\epsilon}$  multiplicando el término de difusión en ambas ecuaciones (estado y observaciones). En [118] y [56] se considera  $f(X(t))$  como una función no lineal.

Después de que el problema de control óptimo lineal estocástico fue resuelto (ver [34], [77]), la teoría de control óptimo para sistemas estocásticos no lineales es basado en la ecuación de programación dinámica (Hamilton-Jacobi-Bellman) [77] y el principio máximo de Pontryagin [59]. Una larga tradición del diseño de control óptimo se desarrolló para sistemas no lineales con respecto a un criterio cuadrático Bolza-Meyer (ver, por ejemplo, [75]-[32]). Los problemas de control óptimo con respecto al criterio no tradicional también fueron considerados: el problema del regulador cuadrático-exponencial estocástico lineal (LEQR) fue introducido en [79], donde es formulado para ambos sistemas, discreto y continuo. Ese tipo de criterios son convencionalmente empleados en algunos de los problemas de la mecánica estocástica ([80], [26]) y la física cuántica [81]. Los problemas de análisis de LEQR estocásticos no lineales y juegos diferenciales se llevaron a cabo en [82]. Además la conexión entre el problema LEQR y control  $H_\infty$  a través de un principio de mínima entropía se dio en [53]. Whittle ([83], [84]) consideró problemas en un tiempo de horizonte finito, usando

ruido-pequeño asintótico. Cuando el proceso siendo controlado es gobernado por una ecuación diferencial estocástica, la fórmula de Whittle para la tasa óptima de grandes derivaciones se obtuvo utilizando el método de solución viscosa para la ecuación diferencial parcial en [82], [85]. Whittle introdujo un parámetro RS en la formulación del problema [84], lo que lleva el nombre de control RS. El parámetro entra en la ecuación de estado, como un multiplicador de los ruidos de Gauss, y el criterio para tener más en cuenta las variaciones del estado general que afectan a los valores del criterio. Runolfsson [86], [87] utilizó ideas de grandes derivaciones de tipo Ponsker-Varadhan para obtener un correspondiente juego diferencial estocástico para el que la recompensa es un juego con criterio ergódico (costo promedio esperado por unidad de tiempo). La asociación de la formulación del espacio de estados se encontró a través del análisis de Fourier (ver Francis [88], Dyn and McKean [89]). Esta formulación del espacio de estados puede naturalmente ser vista en términos de dos jugadores, juego de suma cero (ver, por ejemplo, Basar y Bernhard [16] y Limebeer entre otros. [35]), que también permite ampliar la definición del control  $H_\infty$  para sistemas no lineales. La semejanza que se indica en los juegos diferenciales también se utilizó en [27], [28], [15], y [30]. En [90], [91], [118], y [56], el problema de control óptimo LEQR risk-averse para un sistema estocástico

con ruidos blancos Gaussianos cuya intensidad depende de parámetros, se dijo y solucionó usando una función valor, la cual es una solución viscosa de la ecuación de programación dinámica (HJB). Una ventaja del criterio RS es la robustez de la solución obtenida con respecto al nivel del ruido. De hecho, ya que la solución al problema clásico de LQ es independiente del nivel de ruido, que se produce al ser demasiado sensible a las variaciones de los parámetros de la intensidad del ruido. Por otro lado, el problema RS asume explícitamente la presencia de pequeños parámetros en el criterio. Esto conduce a una solución más robusta, que responde correctamente a las variaciones de los parámetros y los resultados de los valores del criterio para ambos, valores grandes y pequeños de los parámetros.

El criterio exponencial media-cuadrada (EMS), se introdujo en [48] para sistemas determinísticos y en [90] para problemas estocásticos, se utiliza en lugar del criterio convencional media-cuadrada para proporcionar una estimación robusta, que es menos sensible a variaciones de los parámetros de la intensidad del ruido.

Los sistemas autónomos de segundo orden ocupan un espacio importante en el estudio de sistemas lineales porque las trayectorias de solución pueden ser representadas por curvas en el plano [77]. Una ventaja del enfoque RS es la robustez de la solución obtenida para el nivel del ruido.

Las ecuaciones del control óptimo son derivadas buscando las funciones valor cuadrático como soluciones a las correspondientes ecuaciones Hamilton-Jacobi-Bellman.

Sin definir parámetros en las funciones valor son calculados a través de ecuaciones diferenciales ordinarias compuestas mediante la recopilación de términos que corresponden a cada potencia del polinomio del estado dependiente en cada una de las ecuaciones HJB. La forma cerrada de las ecuaciones del regulador RS son obtenidos en forma explícita los problemas de control.

### **1.3. Motivación**

La motivación para realizar este trabajo es que no se contaba con algoritmos para el filtrado de sistemas polinomiales de tercer grado, aclarando que en este caso se obtienen estos algoritmos pero de forma subóptima, es decir, haciendo una linealización del sistema real usando la serie de Taylor alrededor del punto de equilibrio. También obtenemos los algoritmos del control óptimo para sistemas polinomiales de segundo y tercer grado con presencia de un parámetro de intensidad  $\epsilon$  multiplicando al término de difusión en las ecuaciones de estado y observación.

## 1.4. Aportaciones

A continuación son presentadas las aportaciones de esta tesis.

### 1.4.1. Aplicación de los Algoritmos de Filtrado Sub-Óptimos para Sistemas Estocásticos de Tercer Grado

El problema de filtrado RS con respecto al criterio exponencial media-cuadrada es considerado para sistemas estocásticos Gaussianos con término drift polinomial de tercer grado y parámetros de intensidad multiplicando al término de difusión en las ecuaciones de estado y observaciones. La forma cerrada de los algoritmos de filtrado sub-óptimo se obtiene linealizando un sistema polinomial de tercer grado alrededor del punto de equilibrio y reduciendo el problema original al diseño del filtrado óptimo para un sistema polinomial de primer grado. El problema de filtrado reducido se resuelve usando una función valor cuadrática como solución de la correspondiente ecuación HJB. El rendimiento del filtrado RS obtenido para sistemas polinomiales de tercer grado es verificado en un ejemplo numérico contra el filtrado óptimo de media-cuadrada para sistemas polinomiales de tercer grado y el filtrado de Kalman-Bucy extendido, a través de la comparación de los valores del criterio exponencial media-cuadrada. Los resultados de este capítulo se publicaron en: Society for Industrial and Applied Mathe-

matics, 2009, USA; IEEE Multi-Conference on Systems and Control, 2009, Rusia y XLI Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, 2008, México.

#### **1.4.2. Controlador Óptimo RS para Sistemas Polinomiales Estocásticos de Primer Grado**

Este capítulo presenta el problema del controlador óptimo RS para sistemas estocásticos polinomiales de primer grado con un parámetro de intensidad, multiplicando al término de difusión en las ecuaciones de estado y observaciones, también se presenta la función de costo cuadrático-exponencial a ser minimizada. Las ecuaciones del controlador óptimo RS son obtenidas basándose en las ecuaciones de filtrado y control óptimo RS para sistemas polinomiales de primer grado y el principio de separación.

En el ejemplo, las ecuaciones del controlador óptimo RS son comparadas con las ecuaciones del controlador convencional lineal-cuadrático para sistemas polinomiales de primer grado. Los resultados de la simulación revela significantes ventajas en los valores del criterio a favor del controlador RS. Los resultados de este capítulo se publicaron en 6th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control, 2009, Toluca, Mexico.

### **1.4.3. Control Óptimo RS para Sistemas Polinomiales Estocásticos de Segundo Grado**

El problema de control óptimo exponencial-cuadrático es considerado para sistemas estocásticos Gaussianos con polinomios de segundo grado en el término drift y parámetros de intensidad multiplicando al término de difusión en la ecuación del estado. Las ecuaciones de control óptimo de forma cerrada son obtenidos usando funciones valor cuadráticas como soluciones a las ecuaciones correspondientes HJB. El rendimiento del regulador RS obtenido para sistemas polinomiales estocásticos de segundo grado es verificado en un ejemplo numérico, mediante la comparación de los valores del criterio exponencial-cuadrático para el control óptimo RS y las ecuaciones del control bilineal. Los resultados de la simulación revelan fuertes ventajas a favor del diseño de las ecuaciones del control óptimo RS en relación a los valores del criterio final para diferentes valores del parámetro  $\epsilon$ .

Los resultados de este capítulo se publicaron en IEEE Multi-Conference on Systems and Control, Rusia; XLI Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, 2008, México y V Encuentro de la Participación de la Mujer en la Ciencia, 2008, Guanajuato, México.



#### 1.4.4. Control Óptimo RS para Sistemas Polinomiales de Tercer Grado

En este trabajo, las ecuaciones de control óptimo, fueron obtenidos a través del método RS para sistemas estocásticos de tercer grado, con los parámetros  $\epsilon$  y  $\gamma$ , como multiplicadores del término de difusión y el criterio exponencial cuadrático a minimizar. Esto se logra al proponer una función valor cuadrática como solución viscosa de la ecuación diferencial HJB. El control óptimo, el estado óptimo y el valor del criterio exponencial cuadrático son obtenidos en el tiempo final. Estas ecuaciones son comparadas con las ecuaciones de control óptimo polinomial a través de un ejemplo y usando la misma función criterio exponencial cuadrática. En este caso, en el cual tenemos un sistema polinomial de tercer grado, es complicado ajustar la matriz  $P$  en el control RS, ya que tenemos términos de  $X(t)$  y  $X^T(t)X(t)$ , sin embargo, se observa una mayor eficacia en el control óptimo RS para cualquier valor del parámetro  $\epsilon$ . Los resultados de este capítulo se publicaron en IEEE ICIT 2010, Chile y VI Encuentro de la Participación de la Mujer en la Ciencia, 2009, Guanajuato, México.

#### 1.4.5. Control estocástico RS sub óptimo Híbrido $H_2/H_\infty$ para sistemas polinomiales de primer grado

En este trabajo se presenta el problema de control sub óptimo RS híbrido  $H_2/H_\infty$  para sistemas polinomiales de primer grado. Es bien sabido que si los problemas  $H_2$  y  $H_\infty$  presentan diferencias en términos de su naturaleza y objetivos declarados, tienen conexiones notables en su formulación [105]. Mientras que la metodología del control  $H_2$  propone minimizar una integral de criterio cuadrático, independientemente de la robustez del diseño, el  $H_\infty$  se propone una metodología de control robusto en términos de optimización de la relación de atenuación de energía de un canal de entrada-salida dado, incorporando la noción de robustez en el diseño de control. Es importante tener en cuenta que alcanzar robustez  $H_\infty$  a menudo produce un deterioro del rendimiento óptimo, mientras que el diseño  $H_2$  no posee en general propiedades de robustez en el peor de los casos.

El objetivo de este trabajo es verificar la eficiencia del control óptimo de RS con seguimiento, utilizando una función de criterio de costo cuadrático exponencial  $J$  y comparando con  $J_2$  por  $H_2$  para valores de problema de control RS en tiempo final  $T$ , para obtener valores del nivel de atenuación  $\lambda_1$  sosteniendo la igualdad para el enfoque de control RS  $H_\infty$  con criterio de costo  $J_\infty$ , identificar la solución del problema restringido y no restringi-

do. El sistema inmunológico innato en este trabajo se considera como los monocitos ( $M$ ) y el sistema dinámico macrofagos ( $M_\phi$ ). Este sistema requiere mantener en algunos niveles de producción de ( $M$ ) para un estado saludable en un adulto humano. Estas celulas ( $(M)$  y  $(M_\phi)$ ) son responsables del reconocimiento y eliminación de patógenos y células muertas en el organismo humano. El nivel de producción de estas células ( $(M)$  y  $(M_\phi)$ ) como se muestra en el sistema inmunológico, así como la salud y la enfermedad pueden verse en [106]. El impacto de esta propuesta es obtener la modulación del efecto biológico basal, considerando desde un punto de vista médico, el caso del control negativo.  $X_1(t)(M)$  y  $X_2(t)(M_\phi)$  están controlados y siguiendo los valores asintóticos para las condiciones de salud en las personas mayores. La otra novedad de este trabajo, es la aplicación de control RS, con función de costo  $J_2$ , correspondiente al problema de control  $H_2$  RS y problema de optimización restringida híbrida  $H_2/H_\infty$  RS al sistema dinámico de monocitos ( $M$ ) y macrófagos ( $M_\phi$ ). A este sistema de ecuaciones dinámicas, se le ha agregado el término de ruido blanco, con respecto a que el comportamiento en el cuerpo humano no es determinístico.

Los resultados de este capítulo se publicaron en ELSEVIER, Journal of Process Control, 2021.

## 1.5. Organización de la Tesis

En el Capítulo 2 se presenta una síntesis de la teoría de probabilidad, teoría de análisis funcional, procesos estocásticos, ecuaciones de Itô, teoría de filtrado, teoría de control, necesarias para dar al lector una idea de los conceptos en los que se fundamentan los resultados obtenidos, así como las referencias en las que se sustenta la base teórica de los mismos. En el Capítulo 3 se presenta la obtención de las ecuaciones del filtrado sub-óptimo para sistemas polinomiales de tercer grado, con observaciones lineales. Además se realiza una aplicación a un péndulo con fricción para obtener las ecuaciones de filtrado sub-óptimo y verificar la eficacia de este método en comparación en el filtrado polinomial de tercer grado y el filtrado de Kalman-Bucy extendido. En el capítulo 4 se presenta el caso del controlador óptimo RS para sistemas polinomiales estocásticos de primer grado en donde se pretende minimizar el error y encontrar el control óptimo del sistema. Se realiza una aplicación para verificar la eficacia del controlador óptimo RS en comparación con el controlador convencional para cualquier valor del parámetro  $\epsilon$ . En el capítulo 5 se presenta el control óptimo RS para sistemas polinomiales de segundo grado con un parámetro de intensidad multiplicando al término de difusión en la ecuación del estado. Estas ecuaciones del control se obtienen usando una función valor como solución

de la ecuación correspondiente HJB. Se realiza una aplicación sobre un tanque reactor de agitado permanente para verificar que el control óptimo RS tiene mayor ventaja con respecto al control polinomial de segundo grado, es decir se obtiene valores mas pequenos del criterio exponencial-cuadrático para cualquier valor del parámetro  $\epsilon$ . De igual forma se obtienen las ecuaciones del control óptimo RS para sistemas polinomiales de tercer grado en el capítulo 6, y se verifica la eficacia de este método a través de la aplicación a un satélite monoaxial. En el capítulo 7 se presenta el Control estocástico RS sub óptimo híbrido  $H_2/H_\infty$  para sistemas polinomiales de primer grado. En el capítulo 8 se presentan las conclusiones y trabajos futuros.

# Capítulo 2

## Marco Teórico

### 2.1. Probabilidad y Estadística

#### 2.1.1. Variables aleatorias

El modelo matemático para una cantidad aleatoria es una **variable aleatoria**.

**Definición** Si  $\Omega$  es un conjunto dado, entonces una  $\sigma$  – *algebra*  $\mathcal{F}$  en  $\Omega$  es una familia  $\mathcal{F}$  de subconjuntos de  $\Omega$  con las siguientes propiedades:

- $\emptyset \in \mathcal{F}$
- $F \in \mathcal{F} \Rightarrow F^C \in \mathcal{F}$ , donde  $F^C = \Omega \setminus F$  es el complemento de  $F$  en  $\Omega$
- 

$$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

El par  $(\Omega, \mathcal{F})$  es llamado **espacio medible**. Una medida de probabilidad  $P$  en un espacio medible  $(\Omega, \mathcal{F})$  es una función  $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  tal que:

- $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1,$
- si  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$  y  $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$  es disjunto ( esto es,  $A_i \cap A_j = \emptyset$  si  $i \neq j$ ) entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

La triada  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  es llamada un **espacio de probabilidad**. Esto es llamado un **espacio de probabilidad completo** si  $\mathcal{F}$  contiene todos los subconjuntos  $G$  de  $\Omega$  con  $P$ - medida exterior cero, esto es, con  $P^*(G) := \inf P(F); F \in \mathcal{F}, G \subset F = 0$ .

Los subconjuntos  $F$  de  $\Omega$  los cuales pertenecen a  $\mathcal{F}$  son llamados **conjuntos  $\mathcal{F}$  – medibles**.

En un contexto de probabilidad estos conjuntos son llamados **eventos** y usamos la interpretación:

$P(F) =$  "la probabilidad de que el evento  $F$  ocurra".

En particular si  $P(F) = 1$  decimos que " $F$  ocurre con probabilidad 1".

Dada cualquier familia  $\mathcal{U}$  de subconjuntos de  $\Omega$  existe la menor  $\sigma$  - algebra  $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$  contenida en  $\mathcal{U}$ :  $\mathcal{H}_{\mathcal{U}} = \bigcap \{ \mathcal{H}; \mathcal{H} \text{ } \sigma\text{-algebra de } \Omega, \mathcal{U} \subset \mathcal{H} \}$ . Llamamos a  $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$  la  $\sigma$ -algebra generada por  $\mathcal{U}$ .

Si  $\mathcal{U}$  es la colección de todos los subconjuntos abiertos de un espacio topológico  $\Omega$  ( $\Omega = \mathbf{R}^n$ ), entonces  $\mathcal{B} = \mathcal{H}_{\mathcal{U}}$  es llamada **la  $\sigma$ -algebra de Borel** en  $\Omega$  y los elementos  $B \in \mathcal{B}$  son llamados **conjuntos de Borel**.  $\mathcal{B}$  contiene todos los conjuntos abiertos, todos los conjuntos cerrados, todas las uniones contables de los conjuntos cerrados, todas las intersecciones contables de tales uniones contables, etc.

Si  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  es un espacio de probabilidad, entonces una función  $Y : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$  es llamada  **$\mathcal{F}$  medible**, si:

$$Y^{-1}(U) := \{ \omega \in \Omega; Y(\omega) \in U \} \in \mathcal{F}$$

para todos los conjuntos abiertos  $U \in \mathbf{R}^n$  (o equivalentemente, para todos los conjuntos de Borel  $U \subset \mathbf{R}^n$ ).



Si  $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$  es cualquier función, entonces la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{H}_X$  generada por  $X$  es la menor  $\sigma$ -álgebra en  $\Omega$  conteniendo todos los conjuntos  $X^{-1}(U); U \subset \mathbf{R}^n$  abierto.

No es difícil demostrar que  $\mathcal{H}_X = \{X^{-1}(B); B \in \mathcal{B}\}$ , donde  $\mathcal{B}$  es la  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $\mathbf{R}^n$ .  $X$  será entonces  $\mathcal{H}_X$ -medible y  $\mathcal{H}_X$  es la menor  $\sigma$ -álgebra con estas propiedades.

**Lema** Si  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$  son dos funciones dadas, entonces  $Y$  es  $\mathcal{H}_X$  medible si y sólo si existe una función medible de Borel  $g : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  tal que:

$$Y = g(X)$$

.

Una variable  $X$  es una función  $\mathcal{F}$ -medible  $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ . Cada variable aleatoria induce a una medida de probabilidad  $\mu_X$  en  $\mathbf{R}^n$ , definida por:

$$\mu_X(B) = P(X^{-1}(B)).$$

$\mu_X$  es llamada **la distribución de  $X$** .

Si  $\int_{\Omega} |X(\omega)| dP(\omega) < \infty$  entonces el número

$$E[X] := \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega) = \int_{\mathbf{R}^n} x d\mu_X(x)$$

es llamado **la esperanza de  $X$  con respecto a  $P$** .

Más generalmente, si  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  es una medida de Borel y  $\int_{\Omega} |f(X(\omega))| dP(\omega) < \infty$  entonces tenemos:

$$E[f(X)] := \int_{\Omega} f(X(\omega)) dP(\omega) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x) d\mu_X(x)$$

.

**Definición:** Dos subconjuntos  $A, B \in \mathcal{F}$  son llamados **independientes** si:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Una colección  $A = \{\mathcal{H}_i; i \in I\}$  de familias  $\mathcal{H}_i$  de conjuntos medibles es independiente si

$$P(H_{i1} \cap \cdots \cap H_{ik}) = P(H_{i1}) \cdots P(H_{ik})$$

para todas las opciones de  $H_{i1} \in \mathcal{H}_{i1}, \cdots, H_{ik} \in \mathcal{H}_{ik}$  con diferentes índices  $i_1, i_2, \dots, i_k$ . Una colección de variables aleatorias  $\{X_i; i \in I\}$  es independiente si la colección de las  $\sigma$ -álgebras  $\mathcal{H}_{X_i}$  generadas es independiente.

Si dos variables aleatorias  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  son independientes, entonces:

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

siempre que  $E[|X|] < \infty$  y  $E[|Y|] < \infty$ .

**Definición.** Un proceso estocástico es una colección parametrizada de variables aleatorias  $\{X_t\}_{t \in T}$  definida en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  y suponiendo valores en  $\mathbf{R}^n$ .

**Extensión del Teorema de Kolmogorov** Para todo  $t_1, \dots, t_k \in T, k \in \mathbf{N}$  sea  $\nu_{t_1, \dots, t_k}$  la medida de probabilidad en  $\mathbf{R}^{nk}$  tal que

$$\nu_{t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(k)}}(F_1 \times \dots \times F_k) = \nu_{t_1, \dots, t_k}(F_{\sigma^{-1}(1)} \times \dots \times F_{\sigma^{-1}(k)}), \quad (2.1)$$

para todas las permutaciones  $\sigma$  en  $\{1, 2, \dots, k\}$  y

$$\nu_{t_1, \dots, t_k}(F_1 \times \dots \times F_k) = \nu_{t_1, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots, t_{k+m}}(F_1 \times \dots \times F_k \times \mathbf{R}^n \times \dots \times \mathbf{R}^n) \quad (2.2)$$

para todo  $m \in \mathbf{N}$ , donde el conjunto del lado derecho tiene un total de  $k + m$  factores. Entonces existe un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  y un proceso estocástico  $\{X_t\}$  en  $\Omega$ ,  $X_t : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$  tal que

$$\nu_{t_1, \dots, t_k}(F_1 \times \dots \times F_k) = P[X_{t_1} \in F_1, \dots, X_{t_k} \in F_k],$$

para todo  $t_i \in T, k \in \mathbf{N}$  y todos los conjuntos de Borel  $F_i$ .

Fijamos  $x \in \mathbf{R}^n$  y definimos

$$p(t, x, y) = (2\pi t)^{-n/2} \cdot \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{2t}\right) \quad \text{para } y \in \mathbf{R}^n, t > 0.$$

Si  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k$  define una medida  $\nu_{t_1}, \dots, \nu_{t_k}$  en  $\mathbf{R}^{nk}$  por

$$\nu_{t_1, \dots, t_k}(F_1 \times \dots \times F_k) = \int_{F_1 \times \dots \times F_k} p(t_1, x, x_1) p(t_2 - t_1, x_1, x_2) \dots p(t_k - t_{k-1}, x_{k-1}, x_k) dx_1 \dots dx_k$$

donde usamos la notación  $dy = dy_1 \dots dy_k$  para la medida de Lebesgue y la convención de que  $p(0, x, y)dy = \delta_x(y)$ , la unidad de masa en el punto  $x$ .

Extendemos esta definición para todas las secuencias de  $t'_i$ s mediante el uso de (2.1). De  $\int_{\mathbf{R}^n} p(t, x, y)dy = 1$  para todo  $t \geq 0$ , (2.2) se cumple, así que por el Teorema de Kolmogorov existe un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P^x)$  y un proceso estocástico  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  en  $\Omega$  tal que las distribuciones de dimensión finita de  $B_t$  estan dadas por (2.3) esto es:

$$P^x(B_{t_1} \in F_1, \dots, B_{t_k} \in F_k) = \int_{F_1 \times \dots \times F_k} p(t_1, x, x_1) \dots p(t_k - t_{k-1}, x_{k-1}, x_k) dx_1 \dots dx_k \quad (2.4)$$

**Definición.** Este proceso es llamado **movimiento Browniano** a partir de  $x$  (observe que  $P^x(B_0 = x) = 1$ ).

**Propiedades básicas del movimiento Browniano:**

- $B_t$  es un proceso Gaussiano, esto es, para todo  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$  la variable aleatoria  $Z = (B_{t_1}, \dots, B_{t_k}) \in \mathbf{R}^{nk}$  tiene una distribución (multi)-normal.
- $B_t$  tiene incrementos independientes, esto es,  $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$  son independientes para todo  $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 \dots < t_k$ .

**Definición.** Supongamos que  $\{X_t\}$  y  $\{Y_t\}$  son procesos estocásticos en  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Entonces decimos que  $\{X_t\}$  es una versión de  $\{Y_t\}$  si:  $P(\{\omega; X_t(\omega) =$

$Y_t(\omega)\} = 1$  para toda  $t$ .

**Teorema de continuidad de Kolmogorov.** Suponga que el proceso  $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$  satisface la siguiente condición: Para todo  $T > 0$  existen constantes positivas  $\alpha, \beta, D$  tales que:

$$E[|X_t - X_s|^\alpha] \leq D \cdot |t - s|^{1+\beta}; 0 \leq s, t \leq T.$$

Entonces existe una versión continua de  $X$ .

### Ruido Blanco

Un buen modelo del ruido es el ruido blanco.

**Definición** Una sucesión aleatoria  $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$  es una sucesión de Markov para cada  $p(X_k|X_l) = p(X_k), k > l$ . Si las variables aleatorias  $X_k$ s son normalmente distribuidos, la sucesión  $\{X_n\}$  es llamada sucesión aleatoria blanca Gaussiana. Podemos decir que el ruido blanco está compuesto por la superposición de un gran número de pequeños, independientes, y aleatorios efectos, y tomando en cuenta el teorema del límite central, es siempre Gaussiano.

Si  $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$  es una sucesión de vectores aleatorios blancos Gaussianos, la ley de probabilidad es especificada mediante su media  $E(X_n)$  y su matriz de covarianza  $E\{(X_n - E(X_n))(X_m - E(X_m))^T\}, m, n > 1$ .

Y que la sucesión es blanca, entonces:

$$E\{(X_n - E(X_n))(X_m - E(X_m))^T\} = Q_m \delta_{mn} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \delta_{mn} &= 1, n = m \\ &= 0, n \neq m. \end{aligned}$$

Donde  $Q_m$  es una matriz de covarianza semidefinida positiva y  $\delta$  es la función delta de Dirac. Para conocer más propiedades acerca del ruido blanco Gaussiano, consideremos la función de densidad de poder espectral, la cual es definida como la transformada de Fourier de la función de correlación:

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau\omega} \gamma(t + \tau, t) d\tau \quad (2.6)$$

Para el proceso Gaussiano, estacionario, escalar, con función de correlación dada por:

$$\gamma^\rho(t + \tau, t) = \sigma^2(\rho/2) e^{-\rho|\tau|}. \quad (2.7)$$

La función de densidad de poder espectral para 2.7 está dada por

$$f^\rho(\omega) = \frac{\sigma^2}{(1 + \omega/\rho)^2} \quad (2.8)$$

Con  $\rho = \infty$ ,  $f^\rho(\omega) = \sigma^2$ , es una constante positiva. Este es el origen del adjetivo blanco al proceso Gaussiano, ya que se compara con la luz blanca, la cual contiene todas las frecuencias como sus componentes. Una densidad

de poder espectral requiere de infinito poder, por lo cual el ruido blanco Gaussiano no es físicamente realizable. Se puede considerar el ruido blanco Gaussiano como una aproximación cuando la densidad espectral es un proceso de banda ancha. Partiendo de 2.7, tenemos que si  $\rho$  es un entero, entonces la sucesión  $\{\gamma^{\rho_i}|\sigma^2, \rho_1 < \rho_2 < \dots\}$  define una función delta de Dirac:

$$\gamma^\infty = \sigma^2 \delta(\tau).$$

Así, se define formalmente un proceso blanco Gaussiano  $\{X_t, t \in T\}$  como un proceso Gaussiano con:

$$E\{(x_t - E(X_t))(X_\tau - E(X_\tau))^T\} = Q(t)\delta(t - \tau)$$

Sea  $W(t)$ ,  $-\infty < t < \infty$ , un proceso de Wiener con parámetro  $\sigma^2$ . Sean  $a$  y  $b$  números finitos y sea  $f$  una función continuamente diferenciable en el intervalo cerrado de  $a$  a  $b$ . Dado que el proceso de Wiener es no diferenciable, la integral

$$\int_a^b f(t)W'(t)dt$$

o

$$\int_a^b f(t)dW(t)$$

no existe en el sentido usual. Sin embargo, es posible dar un significado a

ésta integral. Una forma de hacer esto es definir la integral como

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^b f(t) \left( \frac{W(t + \varepsilon) - W(t)}{\varepsilon} \right) dt,$$

si el límite existe. Al evaluar explícitamente, observemos que

$$\int_a^b f(t) \left( \frac{W(t + \varepsilon) - W(t)}{\varepsilon} \right) dt = \int_a^b f(t) \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} W(s) ds \right) dt.$$

Calculando por partes la integral del lado derecho de la ecuación, tenemos que

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(t) \left( \frac{W(t + \varepsilon) - W(t)}{\varepsilon} \right) dt \\ &= \left[ f(t) \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} W(s) ds \right]_a^b - \int_a^b f'(t) \left( \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} W(s) ds \right) dt. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Dado que el proceso tiene funciones simples continuas, el lado derecho converge a

$$f(t)W(t)|_a^b - \int_a^b f'(t)W(t)dt,$$

cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Así, definimos

$$\int_a^b f(t) dW(t)$$

como el límite del lado derecho de (2.9), cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , es decir, por la fórmula

$$\int_a^b f(t) dW(t) = f(b)W(b) - f(a)W(a) - \int_a^b f'(t)W(t)dt \quad (2.10)$$



El lado derecho de (2.10) es bien definido y coincide con la fórmula de integración por partes. La derivada del proceso de Wiener es llamada *ruido blanco*. Y no es un proceso estocástico en el sentido usual. Ya que  $dW(t) = W'(t)dt$  es un *funcional* que asigna valores a la integral que aparece en el lado izquierdo de (2.10). El ruido blanco puede ser usado para definir ciertas ecuaciones diferenciales estocásticas, las cuales son usadas en ciencias físicas y especialmente en ciertas áreas de ingeniería. Dado que el proceso de Wiener es Gaussiano, de (2.10) tenemos que

$$\int_a^b f(t)dW(t)$$

se distribuye normalmente. Como es sabido, esta variable aleatoria tiene media cero. Para calcular la varianza, tomemos  $a \leq b$  y  $g$  como otra función continuamente diferenciable en  $[a, b]$ ,

$$E\left[\int_a^b f(t)dW(t) \int_a^b g(t)dW(t)\right] = \sigma^2 \int_a^b f(t)g(t)dt \quad (2.11)$$

Si  $f = g$  de (2.11), para  $a \leq b$

$$Var\left(\int_a^b f(t)dW(t)\right) = \sigma^2 \int_a^b f^2(t)dt$$

## 2.2. Integrales de Ito

**Definición** Sea  $B_t(\omega)$  un movimiento Browniano n-dimensional. Entonces, definimos  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^n$  para ser la  $\sigma$ -álgebra generada por las variables

aleatorias  $\{B_i(s)\}_{1 \leq i \leq n, 0 \leq s \leq t}$ . En otras palabras,  $\mathcal{F}_t$  es la menor  $\sigma$ -álgebra que contiene todos los conjuntos de la forma:

$$\{\omega; B_{t_1}(\omega) \in F_1, \dots, B_{t_k}(\omega) \in F_k\},$$

donde  $t_j \leq t$  y  $F_j \subset \mathbf{R}^n$  son conjuntos de Borel,  $j \leq k = 1, 2, \dots$  (Asumimos que todos los conjuntos de medida cero están incluidos en  $\mathcal{F}_t$ ).

**Definición** Sea  $\{\mathcal{N}_t\}_{t \geq 0}$  una familia creciente de  $\sigma$ -álgebra del subconjunto de  $\Omega$ . Un proceso  $g(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$  es llamada  $\mathcal{N}_t$ -adaptada si para cada  $t \geq 0$  la función  $\omega \rightarrow g(t, \omega)$  es  $\mathcal{N}_t$ -medible.

**Definición** Sea  $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S, T)$  la clase de funciones  $f(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  tal que:

- $(t, \omega) \rightarrow f(t, \omega)$  es  $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$ -medible, donde  $\mathcal{B}$  denota la  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $[0, \infty)$ .
- $f(t, \omega)$  es  $\mathcal{F}_\square$  adaptada.
- $E[\int_S^T f(t, \omega)^2 dt] < \infty$ .

**Definición: La integral de Ito.** Sea  $f \in \mathcal{V}(S, T)$ . Entonces la integral de  $f$  está definida por:

$$\int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S^T \phi_n(t, \omega) dB_t(\omega)$$

donde  $\{\phi_n\}$  es una secuencia de funciones elementales tales que:

$$E\left[\int_S^T (f(t, \omega) - \phi_n(t, \omega))^2 dt\right] \rightarrow 0, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

### 2.3. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

$X_t(\omega)$  es la solución de la ecuación diferencial estocástica:

$$\frac{dX_t}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t)W_t, \quad b(t, x) \in \mathbf{R}, \sigma(t, x) \in \mathbf{R}, \quad (2.12)$$

donde  $W_t$  es un ruido blanco uni-dimensional.  $X_t$  satisface la ecuación integral estocástica:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s \quad (2.13)$$

o en forma diferencial:

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \quad (2.14)$$

**Teorema de la existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales estocásticas** Sean  $T > 0$  y  $b(\cdot, \cdot) : [0, T] \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n \times m}$  funciones medibles que satisfacen:

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|); x \in \mathbf{R}^n, t \in [0, T] \quad (2.15)$$

para alguna constane  $C$ , ( donde  $|\sigma|^2 = \Sigma |\sigma_{ij}|^2$ ) y tal que:

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq D|x - y|; x, y \in \mathbf{R}^n, t \in [0, T] \quad (2.16)$$

para alguna constante  $D$ . Sea  $Z$  una variable aleatoria la cual es independiente de la  $\sigma$ -algebra  $\mathfrak{F}_\infty^{(m)}$  generada por  $B_s(\cdot)$ ,  $s \geq 0$  y tal que  $E[|Z|^2] < \infty$ . Entonces la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, 0 \leq t \leq T, X_0 = Z \quad (2.17)$$

tiene una única solución  $t$ -continua  $X_t(w)$  con la propiedad de que  $X_t(w)$  es adaptada para la filtración  $\mathfrak{F}_t^Z$  generada por  $Z$  y  $B_s(\cdot)$ ;  $s \leq t$  y

$$E\left[\int_0^T |X_t|^2 dt\right] < \infty. \quad (2.18)$$

## 2.4. Problema de Filtrado

Suponga que el estado  $X_t \in \mathbf{R}^n$  en el tiempo  $t$  de un sistema esta dado por una ecuación diferencial estocástica

$$\frac{dX_t}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t)W_t, t \geq 0, \quad (2.19)$$

donde  $b : \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $\sigma : \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}^{n \times p}$  satisface las condiciones (2.15), (2.17) y  $W_t$  es un ruido blanco  $p$ -dimensional.

En el problema de filtrado asumimos que las observaciones  $H_t \in \mathbf{R}^m$  se realizan continuamente y son de la forma:

$$H_t = c(t, X_t) + \gamma(t, X_t) \cdot \widetilde{W}_t, \quad (2.20)$$

donde  $c : \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}^m, \gamma : \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}^{m \times r}$  son funciones que satisfacen (2.15) y  $\widetilde{W}_t$  denota el ruido blanco  $r - dimensional$ , independiente de  $U_t$  y  $X_0$ . Para obtener una interpretación matemática manejable de (2.20) introducimos  $Z_t = \int_0^t H_s ds$  y de tal modo obtenemos la representación integral estocástica de las observaciones:

$$dZ_t = c(t, X_t)dt + \gamma(t, X_t)dV_t, Z_0 = 0, \quad (2.21)$$

donde  $V_t$  es un movimiento Browniano  $r$ -dimensional, independiente de  $U_t$  y  $X_0$ .

### **Teorema: Filtrado de Kalman Bucy uni-dimensional**

La solución  $\hat{X}_t = E[X_t | \mathcal{G}_t]$  del problema de filtrado lineal uni-dimensional

$$dX_t = F(t)X_t dt + C(t)dU_t; \quad F(t), C(t) \in \mathbf{R} \quad \text{ sistema lineal}$$

$$dZ_t = G(t)X_t dt + D(t)dV_t; \quad G(t), D(t) \in \mathbf{R} \quad \text{ observaciones lineales}$$

satisface la ecuación diferencial estocástica:

$$d\hat{X}_t = \left( F(t) - \frac{G^2(t)S(t)}{D^2(t)} \right) \hat{X}_t dt + \frac{G(t)S(t)}{D^2(t)} dZ_t; \quad \hat{X}_0 = E[X_0]$$

donde  $S(t) = E[(X_t - \hat{X}_t)^2]$  satisface la ecuación de Riccati (determinística):

$$\frac{dS}{dt} = 2F(t)S(t) - \frac{G^2(t)}{D^2(t)}S^2(t) + C^2(t), S(0) = E[(X_0 - E[X_0])^2].$$

### **Teorema: Filtrado de Kalman Bucy multi-dimensional**

La solución  $\hat{X}_t = E[X_t | \mathcal{G}_t]$  del problema de filtrado lineal multi-dimensional

$$dX_t = F(t)X_t dt + C(t)dU_t; \quad F(t) \in \mathbf{R}^{n \times n}, C(t) \in \mathbf{R}^{n \times p} \quad \text{sistema lineal}$$

$$dZ_t = G(t)X_t dt + D(t)dV_t; \quad G(t) \in \mathbf{R}^{m \times n}, D(t) \in \mathbf{R}^{m \times r} \quad \text{observaciones lineales}$$

satisface la ecuación diferencial estocástica:

$$d\hat{X}_t = (F - SG^T(DD^T)^{-1}G)\hat{X}_t dt + SG^T(DD^T)^{-1}dZ_t; \quad \hat{X}_0 = E[X_0]$$

donde  $S(t) := E[(X_t - \hat{X}_t)(X_t - \hat{X}_t)^T] \in \mathbf{R}^{n \times n}$  satisface la ecuación matricial de Riccati:

$$\frac{dS}{dt} = FS + SF^T - SG^T(DD^T)^{-1}GS + CC^T; \quad S(0) = E[(X_0 - E[X_0])(X_0 - E[X_0])^T]$$

La condición sobre  $D(t) \in \mathbf{R}^{m \times r}$  ahora es que  $D(t)D(t)^T$  sea invertible para todo  $t$  y que  $(D(t)D(t)^T)^{-1}$  sea acotada en cada intervalo  $t$  acotado.

## 2.5. Control Óptimo

### 2.5.1. Planteamiento del problema

La idea de control puede ser expresada como el proceso mediante el cual se ejerce una influencia sobre el comportamiento de un sistema dinámico (que varía con el tiempo) para alcanzar un propósito previamente fijado. Una clase importante de modelos de sistemas dinámicos controlados, a los cuales se les dice simplemente sistemas de control, es la representada por la ecuación diferencial en  $\mathbf{R}^n$

$$\dot{x}(t) = f(x(t); u(t)); x(t_0) = x_0; \quad (2.22)$$

donde la dinámica  $f$  es una función que satisface condiciones adecuadas y el control  $u(\cdot)$  pertenece a una familia especial  $U$  de funciones con valores en un subconjunto  $U$  de  $\mathbf{R}^n$ . Una vez elegido un control  $u \in U$ , el sistema (2.22) determina una trayectoria o estado  $x(\cdot)$  con condición inicial  $x_0$  en el momento  $t_0$ .

Por ejemplo, si se desea controlar la trayectoria de un avión, con condición inicial  $x(t_0)$ , para lograr una condición final  $x(t_f)$ , el estado del sistema  $x(\cdot)$  podría representar la posición y velocidad del avión y el control  $u(\cdot)$  representaría la fuerza o aceleración necesaria para lograr tal objetivo. Con esta formulación, este ejemplo representa un problema para la

Teoría de Control, la cual hace énfasis en el análisis sobre las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de los controles adecuados, y su computabilidad, así como también de la existencia, unicidad, y estabilidad de la trayectoria que garantice el logro de dicho objetivo. Ahora bien, si además se desea lograr tal propósito en un tiempo mínimo, o con mínimo uso de combustible, entonces este es un problema de control óptimo. En tal caso, se quiere minimizar una funcional que depende del estado del sistema y del control llamada funcional de costo

$$J^{u(\cdot)}(t_0, x_0) = \ell(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t)) dt. \quad (2.23)$$

donde  $L$  y  $\ell$  satisfacen las condiciones necesarias. La función  $L$  representa el costo incurrido por el desplazamiento  $x(\cdot)$  y por la fuerza realizada  $u(\cdot)$ , mientras que la función  $\ell$  representa la penalización por la desviación del estado  $x(t_f)$  en el instante final  $t_f$  de un estado deseado  $x_f$ . En nuestro ejemplo, si queremos minimizar la cantidad de tiempo transcurrido  $t_f$ , debemos tomar  $\ell = 0; L = 1$ . Por otro lado, si deseamos minimizar el uso de combustible, podemos tomar  $L(x; u) = u^2$ . Si un control  $u^*$  es tal que minimiza la funcional de costo, es decir, si

$$J^{u^*(\cdot)}(t_0, x_0) \leq J^{u(\cdot)}(t_0, x_0), \forall u(\cdot) \in U, \quad (2.24)$$

entonces  $u^*$  se denomina control óptimo.



La Teoría de Control Óptimo hace énfasis en el estudio de condiciones necesarias y suficientes para la existencia y unicidad del control óptimo, así como también del desarrollo de metodologías para su determinación y computabilidad.

### 2.5.2. Principio Máximo de Pontryagin

En 1959, L.S. Pontryagin et al [14], presentaron condiciones necesarias de optimalidad, las cuales han sido llamadas el Principio del Máximo de Pontryagin, para el problema de optimización determinado por (2.22) y (2.23). Este resultado establece, bajo ciertas condiciones para la dinámica  $f$  y la familia de controles  $U$ , que si  $u^*(\cdot)$  es un control óptimo y  $x^*(\cdot)$  es la solución de (2.22) que corresponde a  $u^*(\cdot)$ , entonces existen una constante  $\lambda \leq 0$  y una función vectorial  $\phi$ , tales que el vector  $(\lambda; \phi)$  no es idénticamente nulo,  $\phi$  es absolutamente continua y

$$\begin{aligned}\dot{\phi}(t) &= -H_x(x^*(t), u^*(t), \phi(t)), \\ \dot{x}^*(t) &= H_\phi(x^*(t), u^*(t), \phi(t)), \\ H(x^*(t), u^*(t), \phi(t)) &= \max_{u \in U} H(x^*(t), u, \phi(t))\end{aligned}\tag{2.25}$$

donde el Hamiltoniano  $H$  está dado por  $H(x, u, \phi) = \lambda L(x, u) + \phi \cdot f(x, u)$ . Aquí  $\phi \cdot f$  denota el producto interno de  $\phi$  y  $f$ . Para algunos problemas

especiales de control, el Principio del Máximo de Pontryagin enunciado arriba no aporta suficiente información para resolver el problema de control óptimo. Problemas de este tipo son los descritos como problemas de control óptimo singulares y que han emergido en varias especialidades de ingeniería, ciencias básicas, finanzas, etc. Un control óptimo se dice singular si el determinante  $\det(H_{uu})$  se anula en todo punto a lo largo de la trayectoria óptima. En caso contrario, el control óptimo se dice no singular. En particular, si el Hamiltoniano  $H$  es lineal con respecto a una o más de las funciones componentes del control, entonces dicho problema resulta ser singular.

### 2.5.3. Método de Programación Dinámica

En 1957, Richard Bellman presentó el Método de Programación Dinámica para resolver problemas de control óptimo. Este método consiste en reemplazar el problema de optimización (2.22) y (2.23), el cual contiene una minimización en el espacio de dimensión infinita  $U$ , por una ecuación diferencial en derivadas parciales no lineal, llamada ecuación de programación dinámica, o también ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)

$$0 = V_t(t, x) + \inf_{u \in U} \{L(x, u) + V_x(t, x) \cdot f(x, u)\}, \quad t \in [t_0, t_f], \quad x \in \mathbf{R}^n \quad (2.26)$$

que es satisfecha por una función denominada función de valor, la cual se define como

$$V(t_0, x_0) = \inf_{u(\cdot) \in U} J^{u(\cdot)}(t_0, x_0), \quad (2.27)$$

Durante dos décadas la Teoría de Control Óptimo dedicó mayor énfasis al estudio, desarrollo y aplicación del Principio del Máximo de Pontryagin dado que éste es válido en condiciones mucho más sencillas que las condiciones requeridas para la validez del resultado de Bellman. En efecto, para que la función de valor  $V$  satisfaga (2.26) en el sentido clásico de ecuaciones en derivadas parciales se necesita que  $V$  sea continuamente diferenciable, pero para muchos problemas de control óptimo, la función de valor no es diferenciable. Crandall y Lions [4] presentaron una noción más débil de solución de la ecuación de programación dinámica (2.26). Esta noción se conoce como la de solución de viscosidad de (2.26). Con esta noción el método de programación dinámica es aplicable en la mayoría de los casos de interés, aún cuando la función de valor no sea diferenciable. En efecto, se ha probado en condiciones muy generales que la función de valor es una solución de viscosidad de la ecuación de programación dinámica (2.26). Es decir, la ecuación de programación dinámica (2.26) es una condición necesaria que la función de valor debe satisfacer en el sentido de viscosidad.

#### 2.5.4. Ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman

Suponga que el estado de un sistema en el tiempo  $t$  es descrito por un proceso de Ito  $X_t$  de la forma:

$$dX_t = dX_t^u = b(t, X_t, u_t)dt + \sigma(t, X_t, u_t)dB_t, \quad (2.28)$$

donde  $X_t \in \mathbf{R}^n$ ,  $b : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times U \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $\sigma : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times U \rightarrow \mathbf{R}^{n \times m}$  y  $B_t$  es un movimiento Browniano  $m$ -dimensional.  $u_t \in U \subset \mathbf{R}^k$  es un parámetro cuyos valores pueden ser elegidos en el conjunto dado de Borel  $U$  para cualquier instante  $t$  con el fin de controlar el proceso  $X_t$ . Por lo tanto  $u_t = u(t, \omega)$  es un proceso estocástico. Sea  $\{X_h^{s,x}\}_{h \geq s}$  la solución de (2.28) tal que  $X_s^{s,x} = x$ , esto es:

$$X_h^{s,x} = x + \int_s^h b(r, X_r^{s,x}, u_r)dr + \int_s^h \sigma(r, X_r^{s,x}, u_r)dB_r; h \geq s$$

y sea la ley de probabilidad de  $X_t$  a partir de  $x$  por  $t = s$  denotada por  $Q^{s,x}$  as que:

$$Q^{s,x}[X_{t_1} \in F_1, \dots, X_{t_k} \in F_k] = P^0[X_{t_1}^{s,x} \in F_1, \dots, X_{t_k}^{s,x} \in F_k]$$

para  $s \leq t_i$ ,  $F_i \subset \mathbf{R}^n$ ;  $1 \leq i \leq k$ ,  $k = 1, 2, \dots$

Sean  $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times U \rightarrow \mathbf{R}$  y  $g : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  funciones continuas, sea  $G$  un dominio fijo en  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$  y sea  $\hat{T}$  el primer tiempo de salida despues de  $s$  de  $G$  para el proceso  $\{X_r^{s,x}\}_{r \geq s}$ , esto es:

$$\hat{T} = \hat{T}^{s,x}(\omega) = \inf\{r > s; (r, X_r^{s,x}(\omega)) \notin G\} \leq \infty.$$

Suponga que:

$$E^{s,x}[\int_s^{\hat{T}} |f^{u_r}(r, X_r)dr| + |g(\hat{T}, X_{\hat{T}})|\mathcal{X}_{\{\hat{T} < \infty\}}] < \infty \quad \text{para toda } s, x, u.$$

donde  $f^u(r, z) = F(r, z, u)$  Definimos la función criterio  $J^u(s, x)$  por:

$$J^u(s, x) = E^{s,x}[\int_s^{\hat{T}} f^{u_r}(r, X_r)dr + g(\hat{T}, X_{\hat{T}})\mathcal{X}_{\{\hat{T} < \infty\}}].$$

Para obtener una notación más fácil, introducimos:

$$Y_t = (s + t, X_{s+t}^{s,x}) \quad \text{para } t \geq 0, \quad Y_0 = (s, x)$$

y observamos que si sustituimos esto en (2.28), obtenemos la siguiente ecuación:

$$dY_t = dY_t^u = b(Y_t, u_t)dt + \sigma(Y_t, u_t)dB_t.$$

La ley de probabilidad de  $Y_t$  a partir de  $y = (s, x)$  para  $t = 0$  también se denota por  $Q^{s,x} = Q^y$ . Note que:

$$\int_s^{\hat{T}} F^{u_r}(r, X_r)dr = \int_0^{\hat{T}-s} f^{u_{s+t}}(s + t, X_{s+t})dt = \int_0^{\tau_G} f^{u_{s+t}}(Y_t)dt,$$

donde  $\tau_G := \inf\{t > 0; Y_t \notin G\} = \hat{T} - s$ . Sin embargo,  $g(\hat{T}, X_{\hat{T}}) = g(Y_{\hat{T}-s}) = g(Y_{\tau_G})$ . Por lo tanto la función criterio puede ser escrita en términos de  $Y$  como sigue, con  $y = (s, x)$ :

$$J^u(y) = E^y[\int_0^{\tau_G} f^{u_t}(Y_t)dt + g(Y_{\tau_G})\mathcal{X}_{\{\tau_G < \infty\}}].$$

El problema es encontrar el número  $\Phi(y)$  y el control  $u^* = u^*(t, \omega) = u^*(y, t, \omega) \in \mathcal{A}$  tal que  $\Phi(y) := \sup_{u(t, \omega)} J^u(y) = J^{u^*}(y)$ , donde el supremo es tomado sobre una familia  $\mathcal{A}$  de controles admisibles contenidas en el conjunto de todos  $\mathcal{F}_t^{(m)}$ -adaptada procesos  $\{u_t\}$  con valores en  $U$ . Tal control  $u^*$  si existe, es llamado control óptimo y  $\Phi$  es llamado el criterio óptimo o la función valor.

**Teorema. La ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman**

Definiendo  $\Phi(y) = \sup\{J^u(y); u = u(Y) \text{ Control de Markov}\}$ . Suponga que  $\Phi \in C^2(G) \cap C(\bar{G})$  satisface:

$$E^y[|\phi(Y_\alpha)| + \int_0^\alpha |L^v \Phi(Y_t)| dt] < \infty$$

para todo tiempo final acotado  $\alpha \leq \tau_G$ , todo  $y \in G$  y todo  $v \in U$ . Sin embargo, suponga que un control óptimo de Markov  $u^*$  existe y que  $\partial G$  es regular para  $Y_t^{u^*}$ . Entonces,

$$\sup_{v \in U} \{f^v(y) + (L^v \Phi)(y)\} = 0 \quad \text{para toda } y \in G$$

y  $\Phi(y) = g(y)$  para toda  $y \in \partial G$ . El supremo es obtenido si  $v = u^*(y)$  donde  $u^*(y)$  es óptimo. En otras palabras,

$$f(y, u^*(y)) + (L^{u^*(y)} \Phi)(y) = 0 \quad \text{para toda } y \in G.$$

## 2.6. Control Óptimo RS

## 2.7. Problema de Control Óptimo Estocástico RS

El siguiente problema estocástico RS está dado con la dinámica del estado:

$$\begin{aligned} dX(t) &= f(t, X(t), u(t))dt + \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}}dW \\ X(s) &= x, \end{aligned} \quad (2.29)$$

con el criterio de costo cuadrático:

$$I(s, x, u) = \epsilon \log E_{s,x} \exp \left\{ \frac{1}{\epsilon} \left[ \int_s^T L(t, X(t), u(t))dt + \psi(X(T)) \right] \right\}. \quad (2.30)$$

donde  $X(t)$  es el estado en el tiempo  $t$ ,  $X(t) \in \mathbf{R}^n$ ,  $X$  es el estado inicial en el tiempo  $s \geq 0$ ,  $f(t, X_t, u_t)$  es una función no lineal, la cual representa la dinámica nominal con control  $u_t$  tomando valores en  $U \in \mathbf{R}^l$  y  $\{B, F\}$  es un movimiento Browniano  $m$ -dimensional en el espacio de probabilidad  $(\Omega, F, P)$ . El parámetro  $\epsilon$  es una medida de la sensibilidad de riesgo y escala del término de difusión en (4.1) así que el resto del costo acotado (para cada  $x$  como una función de  $\epsilon$ ),  $0 \leq s \leq T < \infty$ ,  $T$  es un tiempo terminal fijo,  $L(t, X_t, u_t)$  es el costo cuadrático en curso y  $\psi(X_T)$  es el costo cuadrático terminal. Definimos:

$$A(s, x, u, \omega) = \int_s^T L(t, X_t, u)dt + \psi(X_T),$$

y

$$J(s, x, u) = E_{s,x} \exp\left[\frac{1}{\epsilon} A(s, x, u, \omega)\right], \quad (2.31)$$

así que

$$I(s, x, u) = \epsilon \log J(s, x, u) = \epsilon \log E_{s,x} \exp\left[\frac{1}{\epsilon} A(s, x, u, \omega)\right]$$

Tomando en cuenta que el controlador  $u(t)$  es minimizado, la siguiente función valor es considerada:

$$V(s, x) = \inf_{u \in A_{s,\nu}} I(s, x, u) \quad (2.32)$$

donde  $A_{s,\nu}$  es el conjunto de controles progresivamente medibles con valores en  $U$ .

$$\varphi(s, x) = \inf_{u \in A_{s,\nu}} J(s, x, u). \quad (2.33)$$

Se muestra en [91] que sobre ciertas condiciones, si  $f(t, X_t, u_t)$  es una función no lineal,  $V$  es una solución viscosa de la ecuación de programación dinámica

$$\begin{aligned} 0 = & V_s + \frac{\epsilon}{2\gamma^2} \sum V_{x_i x_j} + \min_{u \in U} \{f(t, X_t, u_t) \times \\ & \nabla_x V + L(t, X_t, u_t) + \frac{1}{2\gamma^2} \nabla V^T \nabla V\} \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$V(x_t, T) = \psi(X)$$



Este trabajo muestra que si  $f(t, X_t, u_t) = A_t + A_{1t}X_t + A_{2t}X_tX_t + B_tu_t$ , una solución viscosa  $V$  de la ecuación de programación dinámica (2.34) puede encontrarse explícitamente. El problema de control óptimo consiste en encontrar explícitamente una solución viscosa  $V$  para la ecuación de programación dinámica (2.34) cuando  $f(t, X_t, u_t)$  es bilineal, y encontrar el control óptimo el cual minimiza el criterio de costo cuadrático  $J$  y la trayectoria óptima  $x^*$ , sustituyendo  $u^*$  en la ecuación del estado. Las condiciones en [91] para  $f, L, \psi, U$  son supuestas en todo el trabajo; las cuales son ciertas para  $f(t, X_t, u_t) = A_t + A_{1t}x_t + A_{2t}x_tx_t + B_tu_t$ .  $U$  es un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $A_t \in \mathbb{R}^n$ ,  $A_{1t} \in M_{n \times n}$ ,  $A_{2t}$  es un tensor de dimensiones  $n \times n \times n$ .

Como en [91], primero consideramos el problema "cut off" donde las funciones no acotadas de posibilidades  $f, L$  y  $\psi$  son reemplazadas por las contrapartes acotadas. Obtenemos resultados análogos para este problema "cut off" entonces tomamos un límite para obtener el resultado deseado. Las funciones "cut off", puestas por índice  $k$  son dadas por:

$$\begin{aligned} f^k(t, x_t, u_t) &= f(t, x_t, u_t) & \text{if} & \quad |f(t, x_t, u_t)| \leq k \\ &k & \text{if} & \quad |f(t, x_t, u_t)| > k \end{aligned} \quad (2.35)$$

En forma similar para  $L(t, x_t, u_t), \psi$ . De:

$$A^k(s, x, u, \omega) = \int_s^T L(t, X_t^k, u) dt + \psi(X_T^k),$$

y

$$J^k(s, x, u) = E_{s,x} \exp\left[\frac{1}{\epsilon} A^k(s, x, u, \omega)\right]$$

$$I^k(s, x, u) = \epsilon \log J^k(s, x, u)$$

La ecuación de programación dinámica para  $V^k$  esta dada por:

$$\begin{aligned} 0 &= V_s^k + \frac{\epsilon}{2\gamma^2} \sum V_{x_i x_j} + \min_{u \in U} \{f^k(t, X_t, \\ &\quad u_t) \nabla_x V + L^k(t, X_t, u_t) + \frac{1}{2\gamma^2} \nabla V^T \nabla V\} \\ V(x_t, T) &= \psi^k(X) \end{aligned} \tag{2.36}$$

Se demuestra en [91] que  $V^k$  es la solución clásica, única, acotada para (2.36), tomando en cuenta que  $f(t, X_t, u_t)$  es no lineal.

## 2.8. Control híbrido $H_2/H_\infty$

Las ecuaciones de control RS para sistemas no lineales se basan en [90], [91]. Las ecuaciones de control RS para las ecuaciones del sistema estocástico polinomial se pueden ver en [95] and [96]. Por otro lado los problemas

de control  $H_2$  y  $H_\infty$  se han estudiado exhaustivamente en los ultimos años. Algunos ejemplos recientes son: [97] donde un método de diseño de controlador de retroalimentación de salida estática  $H_\infty$  se proporciona para garantizar la estabilidad del circuito cerrado correspondiente a sistemas con la estructura de cuantificación propuesta y satisfacen el rendimiento  $H_\infty$  para la perturbación delimitada externa en términos de desigualdades de matrices lineales (LMI). Mediante el uso de la teoría  $H_2/H_\infty$  y teoría de matrices, el problema se transforma en un problema de optimización no convexo en matrices diagonales. En [98], el estudio presenta análisis de desempeño  $H_2$  y  $H_\infty$  y procedimientos de síntesis para el diseño de controladores de retroalimentación de salida estática robustos y programados por ganancia para sistemas lineales de tiempo discreto con parámetros variables en el tiempo. En [99], los autores investigan el problema de filtrado  $H_2$  y  $H_\infty$  sub óptimo para sistemas lineales de tiempo continuo. En [100], los autores abordan el problema de control robusto de Twin Rotor para sistema de multiples entradas y multiples salidas (TRMS) a través de las técnicas de control  $H_2$  y  $H_1$ . Una técnica de optimización de errores de salida es propuesto para desarrollar controladores  $H_2$  y  $H_1$  para la planta bien posicionada. En [101] dos controladores robustos que son retroalimentación de estado completo,  $H_2$  y retroalimentación completa del estado  $H_\infty$  se pro-

ponen controladores para el sistema de péndulo invertido de dos ruedas. En [102] los autores presentan el centro de dimensión finita del filtro  $H_\infty$  para sistemas polinomiales no lineales, que es sub óptimo para un umbral dado para un criterio cuadrático de Bolza-Meyer modificado que incluye el término de control de atenuación con el signo opuesto. El central filtro sub óptimo  $H_\infty$  también se deriva en una forma cerrada de dimension finita para los estados del sistema polinomial de tercer (y menor) grado. El controlador central de dimension finita  $H_\infty$  para sistemas lineales con parámetros desconocidos, que es sub óptimo para un umbral dado viejo  $\gamma$  relativo a un criterio cuadrático de Bolza-Meyer modificado que incluye el término de control de atenuación con el signo opuesto se presenta en [103]. El controlador central de dimension finita  $H_\infty$  para sistemas variables en el tiempo estocásticos lineales con perturbaciones deterministas acotadas cuadráticamente, que es sub óptimo para un umbral dado  $\gamma$  para un criterio cuadrático de Bolza-Meyer modificado que incluye el término de control de atenuación con signo opuesto. Las ecuaciones del controlador en las últimas referencias se obtienen conectando las ecuaciones de la estimación y control para sistemas polinomiales en general, mientras que en este trabajo solo se presenta el control RS para sistemas polinomiales de primer grado. Es bien sabido que si los problemas  $H_2$  y  $H_\infty$  presentan diferencias

en términos de su naturaleza y objetivos declarados, tienen conexiones notables en su formulación [105]. Mientras que la metodología del control  $H_2$  propone minimizar una integral de criterio cuadrático, independientemente de la robustez del diseño, el  $H_\infty$  se propone una metodología de control robusto en términos de optimización de la relación de atenuación de energía de un canal de entrada-salida dado, incorporando la noción de robustez en el diseño de control. Es importante tener en cuenta que alcanzar robustez  $H_\infty$  a menudo produce un deterioro del rendimiento óptimo, mientras que el diseño  $H_2$  no posee en general propiedades de robustez en el peor de los casos. Luego, la robustez y la optimalidad juntas se presentan en [105]. Esta observación justificó el estudio del llamado problema de control mixto  $H_2/H_\infty$ , en el que un problema  $H_2$  se resuelve sujeto a una restricción de desigualdad  $H_\infty$ . El problema de control híbrido  $H_2/H_\infty$  subóptimo para sistemas no lineales se presenta en [105]. El problema híbrido  $H_2/H_\infty$  subóptimo se obtiene cuando la restricción de  $H_\infty$  se mantiene con el signo de igualdad.

## Capítulo 3

# Aplicación de los Algoritmos de Filtrado Sub-Óptimos para Sistemas Estocásticos de Tercer Grado

### 3.1. Planteamiento del Problema de Filtrado.

Considere el siguiente modelo estocástico (3.1), donde  $X(t)$  denota el estado.  $Y(t)$  denota un proceso de observación.  $X(t)$  satisface el modelo de difusión dado por:

$$dX(t) = f(X(t))dt + \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}}dW(t), \quad (3.1)$$

donde  $f(x(t))$  representa la dinámica nominal, y  $W$  es un movimiento Browniano, y el proceso de observación  $Y(t)$  satisface la ecuación:

$$dY(t) = h(X(t))dt + \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}}d\tilde{W}(t), \quad Y_0 = 0, \quad (3.2)$$

donde  $h(X(t))$  es una función vectorial polinomial,  $\epsilon$  es un parámetro y  $W$  y  $\tilde{W}$  son movimientos Brownianos independientes, los cuales también son independientes de la condición inicial del estado  $X(t)$ .  $X(0)$  tiene densidad de probabilidad  $k_\epsilon \exp(-\epsilon^{-1}\phi(x_0))$  para alguna constante  $k_\epsilon$ . Consideramos

$$J = \epsilon \log E \exp \frac{1}{\epsilon} \int_0^T L(x(t), m(t), t) dt \quad (3.3)$$

como la ecuación del criterio de costo exponencial media cuadrada a ser minimizado.

En el resto del trabajo, los siguientes axiomas (A1)-(A4) ([118]) son cumplidas.

- (A1)  $f, g, h \in \mathbf{R}^n$  con  $f_x, h_x$  acotadas.
- (A2)  $D_1(1/x^2 - 1) \leq \phi(x) \leq D_2(1/x^2 + 1)$ .

$f_x$  es la matriz de derivadas parciales de  $f$  con  $h_x$  definida similarmente.  $\phi$  es una función continua de valores reales que satisface (A2) para algunos valores positivos de  $D_1$  y  $D_2$ .

- (A3)  $f, h \in \mathbf{R}^n$  con  $f, h$ , acotadas y  $f_{xx}, h_{xx}$  acotadas y globalmente Hölder continuas. (Una función  $u$  es globalmente Hölder continua si existe  $\alpha \in (0, 1], K < \infty$  tal que  $|u(x) - u(y)| \leq K|x - y|^\alpha$  para toda  $x, y$ .)
- (A4) Dado  $R < \infty$ , existe  $K_R < \infty$  tal que  $|\phi(x) - \phi(y)| \leq K_R|x - y|$  para todo  $|x|, |y| < \infty$ .

$q(T, x)$  denota la densidad condicional no normalizada de  $X(T)$ , dadas las observaciones  $Y(t)$  para  $0 \leq t \leq T$ . Esto satisface la ecuación diferencial parcial de Zakai, en un sentido preciso, por ejemplo en [121], sec. 7. Puesto que la constante de normalización  $k_\epsilon$  es poco importante para  $q$ , se asume que

$$\begin{aligned} q(0, x) &= \exp(-\epsilon^{-1}\phi(x)) \\ q(T, x) &= p(T, x)\exp[\epsilon^{-1}Y(T) \cdot h(x)] \end{aligned} \tag{3.4}$$

donde  $p(T, x)$  es llamado densidad del filtro no normalizado parte por parte. Entonces,  $p$  satisface la siguiente ecuación diferencial parcial parabólica PDE con coeficientes independientes sobre  $Y(T)$ .

$$\frac{\partial p}{\partial T} = (\check{L}(T))^*p + \frac{K}{\epsilon}p,$$



donde para todo  $g \in \mathbf{R}^n$ , sea

$$\begin{aligned}
Lg &= \frac{\epsilon}{2} \text{tr}(ag_{xx}) + f \cdot g_x, \\
\check{L}(T)g &= Lg - a(Y(T) \cdot h)_x \cdot g_x, \\
K(T, x) &= \frac{1}{2} a(x) (Y(T) \cdot h)_x \cdot (Y(T) \cdot h)_x \\
&\quad - L(Y(T) \cdot h) - \frac{1}{2} |h|^2.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$L$  denota el generador diferencial de la difusión de Markov  $X(t)$  en (3.1). Por los axiomas (A1) y (A3) en [118],  $K$  es acotada y continua.  $(\check{L}(T))^*$  es la forma adjunta de  $\check{L}(T)$ . De  $Y(0) = 0, p(0, x) = q(0, x)$ . La condición inicial para (3.5) es (3.4). Dados algunos  $Y \in C_0(0, T]$  (donde  $C_0$  denota el espacio de  $Y$  continuos tal que  $Y(0) = 0$ , con la norma superior ( $\| \cdot \|$ ). La densidad del filtro no normalizada parte por parte  $p$  es la única solución robusta para (3.5) y (3.4), con  $p$  continua en  $[0, T_1] \times \mathbf{R}^n$  y sus derivadas parciales  $p_T, p_{x_i}, p_{x_i x_j}, i, j = 1, \dots, n$  continuas para  $0 < T \leq T_1$  ([111] Cap. 1, y [21] Cap. 4).

Por otra parte,  $p(T, x; Y) > 0$ . Reescribimos (3.5) de la siguiente manera:

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{1}{2} \text{tr}(a(x)p_{xx}) + A \cdot p_x + \frac{B}{\epsilon} p, \tag{3.6}$$

donde

$$\begin{aligned}
A &= -f(x) + a(x)(Y(T) \cdot h(x))_x + \\
&\quad \epsilon \operatorname{div} a_x(x) \\
B(T, x) &= \frac{\epsilon^2}{2} \operatorname{tra}_{xx}(x) - \epsilon \operatorname{div}[f(x) - a(x)(Y(T) \cdot \\
&\quad h(x))_x] + K(T, x) \\
(\operatorname{div} a_x)_j &= \sum_{i,j=1}^n (a_{ij})_{x_i}, \quad j = 1, \dots, n, \\
\operatorname{tra}_{xx} &= \sum_{i,j=1}^n (a_{ij})_{x_i x_j}.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Estos supuestos implican acotaciones uniformes para  $A$  y  $B$ , dependiendo de la norma superior  $\|Y\|$  en  $[0, T_1]$ , pero no sobre  $\epsilon$ . Tomando el logaritmo:  $Z(T, x) = \epsilon \log p(T, x)$ , que satisface la ecuación diferencial no lineal

$$\frac{\partial Z}{\partial T} = \frac{\epsilon}{2} \operatorname{tr}(Z_{xx}) + A \cdot Z_x + \frac{1}{2} Z_x \cdot Z_x + B, \tag{3.8}$$

con la condición inicial  $Z_x(0, x) = -\phi(x)$ . El problema de filtrado óptimo RS consiste en encontrar el estimado  $C(t)$ , del estado  $X(t)$  a través de la verificación de que:

$$\begin{aligned}
Z(T, x) &= \frac{1}{2} (x - C(T))^T Q(T) (x - C(T)) + \\
&\quad \rho(T) - Y(T) \cdot h(x(t))
\end{aligned} \tag{3.9}$$

es una solución viscosa de (3.8).  $x(t) \in R^n$ ,  $w(t) \in R^m$ ,  $y(t)$ ,  $v(t) \in R^p$ ,  $f$ ,  $h \in R^n$  con  $f_x$ ,  $h_x$  acotadas.

### 3.2. Filtro Óptimo RS

Tomando

$$\begin{aligned} f(X(t)) &= A(t) + A_1(t)X(t) + A_2(t)X(t)X^T(t) + A_3(t)X(t)X^T(t)X^T(t) \\ h(X(t)) &= E(t) + E_1(t)X(t), \end{aligned}$$

con  $A(t) \in R^n$ ,  $A_1(t) \in M_{n \times n}$ ,  $E(t) \in R^p$ ,  $E_1(t) \in M_{n \times p}$ ,  $A_2(t)$  es un tensor de dimensión  $n \times n \times n$ ,  $A_3(t)$  es un tensor de dimensión  $n \times n \times n \times n$ .

Se obtiene el siguiente sistema estocástico de ecuaciones:

$$\begin{aligned} dX(t) &= A(t) + A_1(t)X(t) + A_2(t)X(t)X^T(t) + A_3(t)X(t)X^T(t)X^T(t) \\ &\quad + \sqrt{\tilde{\epsilon}}d\hat{B}_t \\ dY(t) &= E(t) + E_1(t)X(t) + \sqrt{\tilde{\epsilon}}d\tilde{B}_t, \end{aligned}$$

donde  $\tilde{\epsilon} = \frac{\epsilon}{2\gamma^2}$ .

**Teorema:**

La solución del problema de filtrado, para el sistema (3.11) con el criterio exponencial media-cuadrada (3.3) toma la forma:

$$\begin{aligned}\dot{C}(t) &= A(t) + A_1(t)^T C(t) - Q^{-1}(t) E_1(dY - E_1(t)C(t) - E(t)X(t)) \\ \dot{Q}(t) &= -A_1(t)^T Q(t) - Q(t)A_1(t) + Q(t)^T Q(t) - E_1(t)^T E_1(t).\end{aligned}\tag{3.12}$$

Donde  $C(t)$  es el estimado del estado  $X(t)$

**Demostración:**

Se propone como función valor:

$$Z(t, X) = \frac{1}{2}(X(t) - C(t))^T Q(t)(X(t) - C(t)) + \rho(t) - Y(t) \cdot (E(t) + E_1(t)X(t)),$$

la cual es una solución viscosa, con  $Z(0, X(t)) = -\phi(X(t))$ , de la Ecuación Diferencial Parcial no Lineal Parabólica de Zakai (3.8).

$C(t)$ ,  $Q(t)$ ,  $\rho(t)$  son funciones de  $t \in [0, T]$ ,  $C(t) \in \mathbf{R}^n$ ,  $Q(t)$  es una matriz simétrica de Riccati de dimensión  $n \times n$  y  $\rho(t)$  es una función escalar.

$Z_X$ ,  $Z_{XX}$  son las derivadas parciales de  $Z$  respecto a  $X$  y  $\nabla Z$  es el gradiente de  $Z$ .

Las derivadas parciales de  $Z$  están dadas por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{1}{2}(X(t) - C(t))^T \dot{Q}(t)(X(t) - C(t)) + \dot{\rho}(t) - \frac{1}{2}\dot{C}(t)^T Q(t)(X(t) \\
&\quad - C(t)) - \frac{1}{2}(X(t) - C(t))^T Q(t)\dot{C}(t) - dY(t) \cdot (E(t) + E_1(t)X(t)) \\
\frac{\partial Z}{\partial X} &= \frac{1}{2}Q(t)(X(t) - C(t)) + \frac{1}{2}(X(t) - C(t))^T Q(t) - Y(t)E_1(t), \\
\frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial X} &= Q(t).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Sustituyendo (3.13) y las expresiones para  $A$ ,  $B$  en (3.8), agrupando los términos de segundo grado e igualando a cero, haciéndolo también para los términos de primer grado, se obtienen las ecuaciones de filtrado (3.14).

$$\begin{aligned}
\dot{C}(t) &= A(t) + A_1^T(t)C(t) - Q^{-1}(t)E_1(t)(dY - E_1(t)C(t) - E(t)) \\
\dot{Q}(t) &= -A_1^T(t)Q(t) - Q(t)A_1(t) + Q(t)^T Q(t) - E_1(t)^T E_1(t).
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Agrupando los términos independientes, se obtiene la ecuación para  $\rho(t)$ . Aquí,  $Q(t)$  es una matriz simétrica definida negativa, y la condición inicial  $Q(0) = q_0$  se obtiene a partir de las condiciones iniciales para  $Z$ . Si  $\phi(X(t)) = X^T(t)KX(t)$ ,  $Q(0) = -K$ .

Es fácil verificar que si  $Q(t) = -P^{-1}(t)$ , (donde  $P(t)$  es la matriz de

covarianza) estas ecuaciones son equivalentes a las ecuaciones del filtro Kalman-Bucy que fueron mostradas en [36].

### 3.3. Aplicación

Considere las ecuaciones del péndulo con fricción, de [10] el sistema dinámico con ecuaciones de estado y observaciones está considerado por:

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= X_2, \\ \dot{X}_2 &= -\frac{g}{l}\text{Sen}X_1 - \frac{k}{m}X_2\end{aligned}\tag{3.15}$$

Donde  $X_1$  representa el ángulo con respecto a la posición vertical del péndulo colgado. Por lo tanto si  $X_1 = 0$ , esto representa que el péndulo está en un posición estática.  $X_2$  representa la derivada de  $X_1$ . Este sistema se reduce a la forma polinomial:

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= X_2, \\ \dot{X}_2 &= -\frac{g}{l}\left(X_1 - \frac{X_1^3}{3!}\right) - \frac{k}{m}X_2.\end{aligned}\tag{3.16}$$

Donde:  $X \in R^2$ ,  $g = 9.8m/s^2$ ,  $l = 0.5m$ ,  $m = 0.25Kg$ ,  $k = 0.001$ .

Note que  $X_1$  es una variable medible, cuando  $X_2$  es una variable observable pero no medible. Expandiendo en Series de Taylor [125], alrededor del punto de equilibrio, este sistema se reduce a un polinomio de tercer grado

de la forma:

$$\begin{aligned}
\dot{X}_1 &= X_2 + \sqrt{\epsilon}dW_1, \\
\dot{X}_2 &= -\frac{g}{l}(X_1 - \frac{X_1^3}{3!}) - \frac{k}{m}X_2 + \sqrt{\epsilon}dW_2, \\
X_{i0} &= X_i \\
Y(t) &= X_1dt + \sqrt{\epsilon}d\bar{W}_t
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Para obtener la linealización [124] debemos evaluar el sistema en los valores nominales de las variables de nuestro sistema dinámico. Considerando que al evaluar en un punto nominal, este puede representar ya sea un punto de equilibrio o un punto de operación del sistema dinámico. Como  $X_1$  representa el ángulo respecto a la posición vertical, si  $X_1 = 0$  se encuentra en la posición estática, entonces evaluamos en  $X_1 = 0$  y como  $X_2$  representa la derivada de esto, entonces  $X_2 = 0$ . Por lo tanto, usando la igualdad  $\text{sen}(X_1) = X_1$ , tenemos el siguiente sistema dinámico linealizado:

$$\begin{aligned}
dX_1(t) &= X_2(t), \\
dX_2(t) &= -\frac{g}{l}X_1(t) - \frac{k}{m}X_2(t)dt + \sqrt{\epsilon}dW_t, X_{i0} = X_i \\
Y(t) &= X_1(t)dt + \sqrt{\epsilon}d\bar{W}_t
\end{aligned} \tag{3.18}$$

donde  $W_1, W_2, \bar{W}_t$  son movimientos Brownianos independientes, que además son independientes de  $X_{i0} = X_{i0}$ .  $\epsilon$  es un parámetro variable.

Sustituyendo los valores correspondientes en (3.14), las ecuaciones para el filtrado sub-óptimo RS están dadas por:

$$\begin{aligned}\dot{C}_1(t) &= -\frac{g}{l}C_2(t) + \frac{1}{q_{12}^2(t) - q_{22}(t)q_{11}(t)}(q_{22}(t)(\dot{Y}(T) - C_1(t)) + q_{12}(t)C_2(t)) \\ \dot{C}_2(t) &= C_1(t) - \frac{k}{m}C_2(t) - \frac{1}{q_{12}^2(t) - q_{22}(t)q_{11}(t)}(q_{21}(t)(\dot{Y}(T) - C_1(t)) + \\ &\quad q_{11}(t)C_2(t)),\end{aligned}\tag{3.19}$$

donde  $q_{12}(t)$ ,  $q_{22}(t)$ ,  $q_{11}(t)$  son las soluciones de la siguiente ecuación de la matriz simétrica de Riccati:

$$\begin{aligned}\dot{q}_{11}(T) &= 2\frac{g}{l}q_{21}(t) + q_{11}^2(t) + q_{12}^2(t) - 1 \\ \dot{q}_{12}(T) &= \frac{g}{l}q_{22}(t) - q_{11}(t) + \frac{k}{m}q_{12}(t) + q_{11}(t)q_{12}(t) + q_{12}(t)q_{22}(t) \\ \dot{q}_{22}(T) &= \frac{2k}{m}q_{22}(t) - 2q_{21}(t) + q_{12}^2(t) + q_{22}^2(t) - 1.\end{aligned}\tag{3.20}$$

Las últimas ecuaciones (3.19) fueron simuladas utilizando Simulink en *MatLab*7. Las condiciones iniciales para la simulación son  $X(0) = 0$ ,  $q_{11}(0) = -8.9$ ,  $q_{12}(0) = -1.75$ ,  $q_{22}(0) = -1.5$ ,  $C_1(0) = 1$ ,  $C_2(0) = 1$ ,  $T = 10$ .

Aplicando los algoritmos de filtrado de Kalman-Bucy extendido [9] para las ecuaciones de estado (3.18), las ecuaciones para el vector estimado  $m(t)$



y la matriz simétrica de covarianza  $P(t)$  son obtenidas:

$$\begin{aligned}
dm_1(t) &= m_2(t)dt + \frac{p_{11}(t)}{\epsilon}(dY(t) - m_1(t)dt) \\
dm_2(t) &= -\frac{g}{l}m_1(t)dt - \frac{k}{m}m_2(t)dt + \frac{p_{12}(t)}{\epsilon}(dY(t) - m_1(t)dt) \\
\dot{p}_{11}(t) &= -2p_{12}(t) - \frac{p_{11}^2(t) + p_{12}^2(t)}{\epsilon} + \epsilon \\
\dot{p}_{12}(t) &= -\frac{g}{l}p_{11}(t) - \frac{k}{m}p_{12}(t) + p_{22}(t) - \frac{p_{11}(t)p_{12}(t) + p_{22}(t)p_{12}(t)}{\epsilon} \\
\dot{p}_{22}(t) &= -2\frac{g}{l}p_{12}(t) - 2\frac{k}{m}p_{22}(t) - \frac{p_{12}^2(t) + p_{22}^2(t)}{\epsilon} + \epsilon
\end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones es simulado con las condiciones iniciales:  $m_1(0) = m_2(0) = 1$ ,  $p_{11}(0) = 0.1678321$ ,  $p_{12}(0) = -0.1958041$ ,  $p_{22}(0) = 0.89510$ .

<i>valor de epsilon</i>	<i>J R – S</i>	<i>J TercerGrado</i>	<i>J K – Bext.</i>
0.001	8.10669	0.5528	0.5647
0.01	8.1077	0,9272	1.4173
0.1	8.1105	7.1198	15.9131
1	8.12	10.7299	51.7838
10	8.255	$1.285 \times 10^6$	70.8296
100	9.3933	$8.25 \times 10^9$	69.6641
1000	21.4763	$1.42 \times 10^{13}$	62.0612

Las ecuaciones de filtrado polinomial de tercer grado de [77] están dadas por:

$$\begin{aligned}
\dot{m}_1(t) &= m_2(t) + \frac{p_{11}(t)}{\epsilon}(\dot{Y}(t) - m_1(t)) \\
\dot{m}_2(t) &= -\frac{g}{l}m_1(t) - \frac{k}{m}m_2(t) + \frac{g}{6l}(3p_{11}(t)m_1(t) + m_1^3(t)) + \frac{p_{21}(t)}{\epsilon}(\dot{Y}(t) - m_1(t)) \\
\dot{p}_{11}(t) &= 2p_{12}(t) + \epsilon - \frac{1}{\epsilon}p_{11}^2(t) \\
\dot{p}_{12}(t) &= -\frac{g}{l}p_{11}(t) - \frac{k}{m_{12}}(t) + p_{22}(t) + \frac{g}{2l}p_{11}^2(t) + \frac{g}{2l}p_{11}(t)m_1^2(t) - \frac{2}{\epsilon}p_{11}(t)p_{12}(t) \\
\dot{p}_{22}(t) &= -\frac{2g}{l}p_{12}(t) - \frac{2k}{m_{22}}(t) + \frac{g}{l}p_{11}(t)p_{12}(t) + \frac{g}{l}p_{12}(t)m_1^2(t)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Tabla 2: Comparación del criterio media-cuadrada (3.3) para el filtro RS, y los filtros Bilineal y Kalman-Bucy extendido, para algunos valores de  $\epsilon$ .

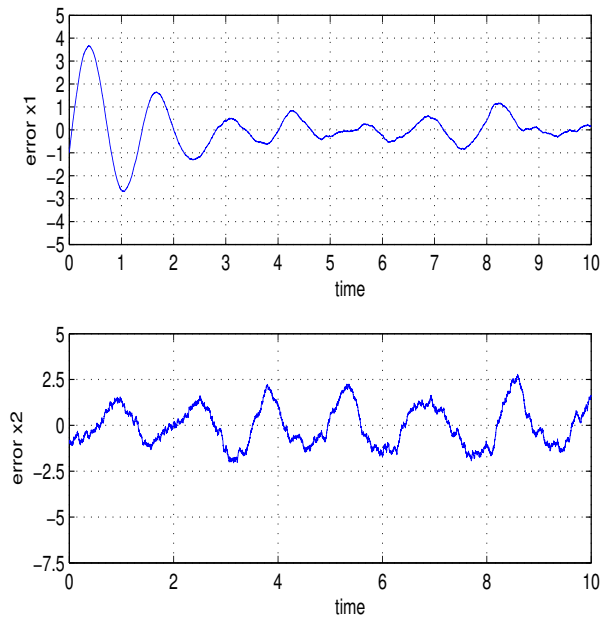


Figura 3.1: Gráfica de los valores absolutos de la diferencia entre el estado  $X(t)$  y el estimado RS  $C_T$ , para  $\epsilon = 1000$ .

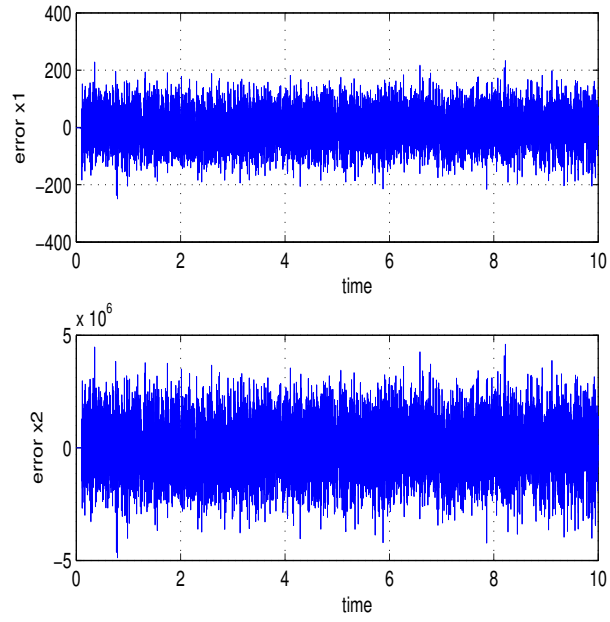


Figura 3.2: Gráfica de los valores absolutos de la diferencia entre  $X(t)$  y el estimado polinomial de tercer grado  $m(t)$ , para  $\epsilon = 1000$ .

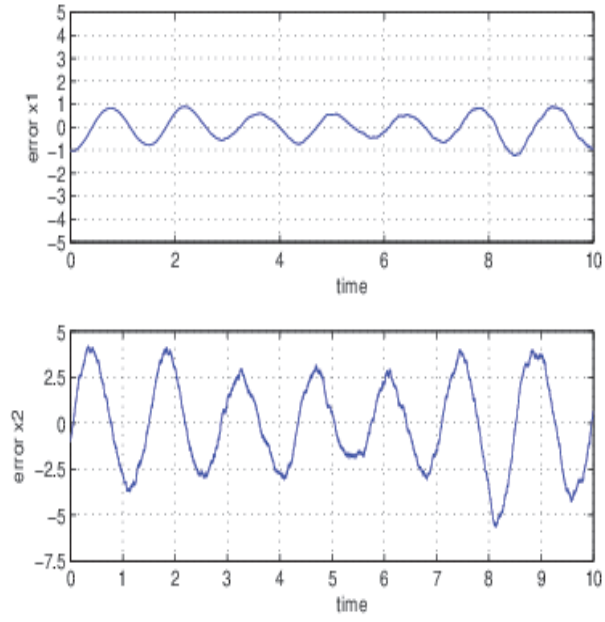


Figura 3.3: Gráfica de los valores absolutos de la diferencia entre  $X(t)$  y el estimado Kalman-Bucy extendido  $m(t)$ , para  $\epsilon = 1000$ .

## Capítulo 4

# Controlador Óptimo RS para Sistemas Polinomiales Estocásticos de Primer Grado

### 4.1. Problema del controlador óptimo RS

#### 4.1.1. Planteamiento del problema

Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  el espacio de probabilidad completa con una familia de  $\sigma$ -álgebras continuas crecientes por la derecha  $\mathcal{F}(t)$ ,  $t \geq 0$ , y sean  $(W_1(t), \mathcal{F}(t), t \geq 0)$  y  $(W_2(t), \mathcal{F}(t), t \geq 0)$  procesos de Wiener  $\mathcal{F}(t)$ -adaptada. Consideremos el proceso aleatorio  $\mathcal{F}(t)$ -medible, no observable y  $X(t)$  gob-

ernado por la ecuación del estado polinomial de primer grado:

$$\begin{aligned} dX(t) &= (A_0(t) + A_1(t)X(t) + B(t)u(t))dt + \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}}dW_1(t), \\ X(t_0) &= X_0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

y la ecuación de observación polinomial de primer grado

$$dy(t) = (a_0(t) + a_1(t)X(t))dt + \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}}dW_2(t). \quad (4.2)$$

El vector de estado  $X(t) \in \mathbf{R}^n$ , la entrada de control  $u(t) \in \mathbf{R}^p$ , el proceso de observación  $y(t) \in R^q$ .  $W_1(t)$ ,  $W_2(t)$  son procesos Wiener independientes representando disturbios aleatorios en las ecuaciones de estado y observación, las cuales son independientes del vector inicial Gaussiano  $X_0$ . El parámetro  $\epsilon$  escala el término de difusión, el parámetro  $\gamma$  es una medida del nivel de atenuación del término de difusión (ver [57] para más detalles). El vector  $A_0(t)$  representa las preturbaciones que afectan el proceso. La función de costo exponencial-cuadrático  $J$  a ser minimizada está dada por:

$$\begin{aligned} J &= \epsilon \log E \exp \frac{1}{\epsilon} \left( \int_{t_0}^T (X(s)^T L(s) X(s) + u(s)^T R(s) u(s)) dt + \right. \\ &\quad \left. X^T(T) \psi X(T) \right). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Aquí,  $R(s)$  es una matriz simétrica definida positiva,  $L(s)$ ,  $\psi$  son matrices simétricas definidas no negativas,  $T > t_0$ ,  $E(\zeta)$  es el valor esperado de la variable aleatoria  $\zeta$ ,  $C^T(t)$  denota la traspuesta del de un vector o matriz

$C(t)$ . La ecuación correspondiente HJB está dada por:

$$\begin{aligned}
0 &= V_t + \frac{\epsilon}{2\gamma^2} \Sigma V_{X_i X_j} + \min_{u \in U} \{ f(t, X(t), u(t)) \times \\
&\quad \nabla_X V + L(t, X(t), u(t)) + \frac{1}{2\gamma^2} \nabla V^T \nabla V \}, \quad (4.4) \\
V(X(T), T) &= \psi.
\end{aligned}$$

donde  $V_{X_i X_j}$  denota la segunda derivada parcial de  $V$  con respecto a  $X_i$  y  $X_j$ . La siguiente función valor es considerada:

$$V(X, t) = \inf_{u \in A_{t,v}} J(t, X(t), u(t)),$$

donde  $A_{t,v}$  es un conjunto de controles con valores en  $U = \mathbf{R}^p$ . La demostración de que  $V(X, t)$  es una solución viscosa de la ecuación HJB (4.4) puede ser vista en [77]. El problema del controlador óptimo consiste en lograr que el estado alcance al estimador, verificando que el error entre el estado y su estimado tienda a cero, además de encontrar el control óptimo  $u^*(t)$  que minimiza el criterio exponencial-cuadrático  $J$  a lo largo de la trayectoria  $X^*(t)$  generada al sustituir  $u^*(t)$  en la ecuación del estado (4.1), tomando la función valor  $V(X, t)$  como la solución de la ecuación HJB (4.4).



#### 4.1.2. Principio de separación para sistemas polinomiales

En cuanto a los sistemas estocásticos lineales, el principio de separación se sigue cumpliendo para los sistemas estocásticos con los términos polinomiales de primer grado en el término *drift* y las ecuaciones de observaciones y el criterio exponencial-cuadrático para reducirse al mínimo.

Usando los resultados obtenidos en [14] para el filtrado óptimo RS, vamos a sustituir la ecuación del estado no medible (4.1) por la ecuación del estimador RS  $\bar{m}(t)$ :

$$\frac{d\bar{m}(t)}{dt} = A(t) + A_1^T(t)\bar{m}(t) + B(t)u(t) - Q^{-1}(t)A_1(t)(dy(t) - a_1(t)\bar{m}(t) - a_0(t)),$$

con la condición inicial  $\bar{m}(0) = \bar{m}_0$ , donde  $Q(t)$  es la solución de la ecuación de Riccati

$$dQ(t) = (-A_1^T(t)Q(t) - Q(t)A_1(t) + Q^T(t)Q(t) - a_1^T(t)a_1(t))dt, \quad (4.5)$$

$$Q(t_0) = q_0.$$

Siguiendo [34], el criterio exponencial-cuadrático puede ser representado por:

$$\begin{aligned} J = & \epsilon \log E \exp \frac{1}{\epsilon} \left( \int_{t_0}^T (m(s)^T L(s)m(s) + u(s)^T R(s)u(s)) ds + \bar{m}^T(T)\psi\bar{m}(T) \right) \\ & + \int_{t_0}^T \text{tr}[-Q^{-1}(s)L(s)] ds + \text{tr}[-Q^{-1}(T)\psi], \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde  $tr[P]$  denota la traza de la matriz  $P$ .

En [36] se muestra que  $P(t) = -Q^{-1}(t)$ , donde  $P(t)$  es la matriz de covarianza del error de las ecuaciones de filtrado Kalman-Bucy y  $Q(t)$  es la solución de la ecuación de Riccati (4.5). La última parte de  $J$  es independiente del control  $u(t)$  o del estado  $X(t)$ , entonces la función del criterio de costo  $\tilde{J}$  a ser minimizada se reduce y toma la forma:

$$\tilde{J} = \epsilon \log \text{Exp} \frac{1}{\epsilon} \left( \int_{t_0}^T (m(s)^T L(s) m(s) + u(s)^T R(s) u(s)) ds + \bar{m}^T(T) \psi \bar{m}(T) \right)$$

Por lo tanto, la solución para el problema de control óptimo especificado por (4.1) y (4.3) se puede encontrar como la solución del problema de control óptimo dado por (4.5) y (4.7). Sin embargo, el valor mínimo del criterio exponencial-cuadrático  $J$  puede ser determinado usando (4.6). Esto produce el principio de separación en el problema del controlador óptimo RS para sistemas polinomiales de primer grado.

#### 4.1.3. Solución al problema de Control Óptimo RS

Usando los resultados obtenidos en [77] para el regulador óptimo RS para sistemas polinomiales de primer grado, la solución del problema del controlador RS esta dada por la ley de control:

$$u^*(t) = -\frac{1}{2} B(t)^T P(t) (\bar{m}(t) - C(t)), \quad (4.8)$$

la cuál minimiza el criterio cuadrático (4.6), donde las funciones matriciales  $P(t)$  y  $C(t)$  satisfacen las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\dot{P}(t) &= P^T(t)\left(-\frac{B(t)B^T(t)}{2} - \frac{1}{\gamma^2}\right)P(t) - A_1^T(t)P(t) - P(t)A_1(t) - 2I, \\
P(T) &= \psi, \\
\dot{C}(t) &= A_1^T(t)C(t) + 2C^T(t)P^{-1}(t) + A(t), \\
C(T) &= 0,
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Sustituyendo el control óptimo (4.8) en la ecuación (4.5) para el sistema de estados reconstruido para  $\bar{m}(t)$ , se obtiene la siguiente ecuación del estado óptimamente controlado:

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{m}(t)}{dt} &= A(t) + A_1^T(t)\bar{m}(t) - \frac{1}{2}B(t)B^T(t)P(t)(X(t) - \bar{m}(t) - \\
&\quad Q^{-1}(t)a_1(t)(dy(t) - a_1(t)\bar{m}(t) - a_0(t)), \\
\bar{m}(0) &= \bar{m}_0.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Por lo tanto, la solución completa para el controlador óptimo RS para sistemas polinomiales de primer grado está dada por las ecuaciones del estado optimamente controlado (4.10), la ley de control óptimo (4.8) y la ecuación de Riccati (4.5), las ecuaciones del filtrado RS (4.9) y el regulador de la matriz de ganancia.

## 4.2. Aplicación

### 4.2.1. Controlador óptimo estocástico RS

Considere el problema del controlador óptimo RS para un sistema dinámico bi-dimensional gobernado por las ecuaciones de estado

$$\begin{aligned}dX_1(t) &= X_2(t)dt + \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}}dW_1(t), X_1(0) = X_1, \\dX_2(t) &= dt + u(t)dt + \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}}dW_2(t), X_2(0) = X_2,\end{aligned}\tag{4.11}$$

donde  $\gamma = 2$ , y  $\epsilon$  es un parámetro variante. El criterio exponencial-cuadrático toma la forma:

$$\begin{aligned}J(X(t), u(t)) &= \epsilon \log E \exp\left(\frac{1}{\epsilon} \int_0^T (X^T(s)X(t) + \right. \\&\quad \left. u^T(s)u(s))ds + X^T(T)X(T)\right),\end{aligned}\tag{4.12}$$

donde  $T > T_0$  es un cierto momento del tiempo.

Sea el proceso de observación dado por las observaciones lineales directas con un modelo de perturbaciones independientes e idénticamente distribuidas como ruidos blancos Gaussianos:

$$dy(t) = X_1(t) + \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}}dW_1(t).\tag{4.13}$$

Aplicando las ecuaciones del controlador óptimo obtenido para el sistema (4.11), (4.13), la matriz de ecuaciones de ganancia (4.9), el control óptimo

(4.8), y la ecuación del estimador del estado optimamente controlado (4.10)

toma la siguiente forma particular:

$$\begin{aligned}
u^*(t) &= -\frac{1}{2}(p_{21}(t)(\bar{m}_1(t) - C_1(t)) + p_{22}(t)(\bar{m}_2(t) - \\
&\quad C_2(t))), \tag{4.14} \\
\frac{dp_{11}(t)}{dt} &= -2 + (p_{11}^2(t) + p_{12}^2(t))(\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma^2}), \\
\frac{dp_{12}(t)}{dt} &= -p_{11}(t)(p_{11}(t)p_{12}(t) + p_{12}(t)p_{22}(t))(\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma^2}), \\
\frac{dp_{22}(t)}{dt} &= -2 + (p_{11}^2(t) + p_{22}^2(t))(\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma^2}) - 2p_{12}(t), \\
\frac{dC_1(t)}{dt} &= 2\frac{C_1(t)p_{22}(t) - C_2(t)p_{12}(t)}{p_{22}(t)p_{11}(t) - p_{12}^2(t)}, \\
\frac{dC_2(t)}{dt} &= 1 + C_1(t) + 2\frac{C_2(t)p_{11}(t) - C_1(t)p_{21}(t)}{p_{22}(t)p_{11}(t) - p_{12}^2(t)}, \\
d\bar{m}_1(t) &= \bar{m}_2(t)dt - \frac{q_{22}(t)(dy(t) - \bar{m}_1(t)dt)}{q_{22}(t)q_{11}(t) - q_{12}^2(t)}, \\
d\bar{m}_2(t) &= dt - \frac{-q_{12}(t)(dy(t) - \bar{m}_1(t)dt)}{q_{22}(t)q_{11}(t) - q_{12}^2(t)} - \frac{1}{2}(p_{21}(t) \times \\
&\quad (\bar{m}_1(t) - C_1(t)) + p_{22}(t)(\bar{m}_2(t) - C_2(t)))dt, \\
\dot{q}_{11}(t) &= -2q_{12}(t) + q_{11}^2(t) + q_{12}^2(t) - 1, \\
\dot{q}_{12}(t) &= -q_{22}(t) + q_{12}(t)q_{11}(t) + q_{12}(t)q_{22}(t), \\
\dot{q}_{22}(t) &= q_{12}^2(t) + q_{22}^2(t).
\end{aligned}$$

El sistema (4.14), es estable si  $|\gamma| \geq 1,40$ ; el cual se obtiene al despejar  $\gamma$  de la siguiente ecuación:

$$P^T(t)\left(-\frac{B(t)B^T(t)}{2} - \frac{1}{\gamma^2}\right)P(t) - A_1^T(t)P(t) - P(t)A_1(t) - 2I = 0 \quad (4.15)$$

Al resolver las ecuaciones (4.14), el estado optimamente controlado  $X^*(t)$  puede obtenerse como la solución de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= X_2(t)dt + \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}}dW_1(t), \quad X_1(0) = X_1, \\ dX_2(t) &= dt - \frac{1}{2}(p_{21}(t)(\bar{m}_1(t) - C_1(t)) + p_{22}(t)(\bar{m}_2(t) - C_2(t)))dt + \\ &\quad \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}}dW_2(t), \quad X_2(0) = X_2. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Las condiciones iniciales están dadas por:  $X_1(0) = 0,1$ ,  $X_2(0) = 1$ . Los valores del criterio exponencial-cuadrático minimizado  $J$  son obtenidos usando el método de Monte Carlo. El tiempo final es para  $T = 0,5seg$ . La simulación es hecha en Simulink *Matlab7*, para ciertos valores del parámetro  $\epsilon$ . Las condiciones iniciales para la simulación son  $p_{11}(0) = 1,75$ ,  $p_{12}(0) = 0$ ,  $p_{22}(0) = 1,75$ , para obtener  $p_{11}(0,5) = 1$ ,  $p_{12}(0,5) = 0$ ,  $p_{22}(0,5) = 1$ .  $c_1(0) = 0$ ,  $c_2(0) = -0,37$ , para obtener  $c_1(0,5) = 0$ ,  $c_2(0,5) = 0$ .  $m_1(0) = 0,5$ ,  $m_2(0) = 0,4$ ,  $q_{11}(0) = -0,35484$ ,  $q_{12}(0) = 0,29032$ ,  $q_{22}(0) = -0,41935$ . El diseño de controlador óptimo RS para sistemas estocásticos polinomiales de primer grado es comparado con respecto al controlador estocástico lineal cuadrático en la siguiente sección.

### 4.2.2. Controlador Estocástico Lineal Cuadrático

Las ecuaciones del controlador lineal cuadrático (ver [34]) para el sistema (4.11), (4.13) con respecto al criterio exponencial-cuadrático (4.12) están dadas por:

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)(Q(t)m(t) + p(t)), \quad (4.17)$$

donde  $Q(t)$  es la solución de la ecuación de la matriz de ganancia:

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= -Q(t)A(t) - A^T(t)Q(t) + L - Q(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)Q(t), \\ Q(T) &= \psi, \end{aligned} \quad (4.18)$$

y  $p(t)$  es la solución de la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= -Q(t)A_1(t) - (p^T(t)A(t))^T - Q(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)p(t), \\ p(T) &= 0, \end{aligned} \quad (4.19)$$

Tomando en cuenta el control estocástico lineal cuadrático [34] y el filtro de Kalman-Bucy [33], las ecuaciones del controlador LQ (lineal cuadrático) toman la siguiente forma para el sistema (4.11), (4.13) y el criterio exponencial-

cuadrático (4.12):

$$u^*(t) = q_{21}(t)m_1(t) + q_{22}(t)m_2(t) + p_2(t), \quad (4.20)$$

$$\dot{q}_{11}(t) = 2 - \frac{q_{12}^2(t)}{2}, \quad (4.21)$$

$$\dot{q}_{12}(t) = -q_{11}(t) - \frac{q_{12}(t)q_{22}(t)}{2},$$

$$\dot{q}_{22}(t) = 2 - \frac{q_{22}^2(t)}{2} - 2q_{12}(t),$$

$$\dot{p}_1(t) = -q_{11}(t) - \frac{q_{12}(t)p_2(t)}{2},$$

$$\dot{p}_2(t) = -p_1(t) - q_{12}(t) - \frac{q_{22}(t)p_2(t)}{2},$$

$$dm_1(t) = m_2(t)dt + \frac{p_{11}(t)(dy(t) - m_1(t)dt)}{\epsilon},$$

$$dm_2(t) = dt + \frac{p_{21}(t)(dy(t) - m_1(t))dt}{\epsilon} + (q_{21}(t)m_1(t) + q_{22}(t)m_2(t) + p_2(t)dt),$$

$$\dot{p}_{11}(t) = p_{21}(t) + p_{12}(t) - \frac{p_{11}^2(t)}{\epsilon} + \epsilon,$$

$$\dot{p}_{12}(t) = p_{22}(t) - \frac{p_{11}(t)p_{12}(t)}{\epsilon},$$

$$\dot{p}_{22}(t) = -\frac{p_{12}^2(t)}{\epsilon} + \epsilon,$$

Las ecuaciones del estado optimamente controlado estan dadas por:

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= X_2(t)dt + \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}}dW_1(t), \quad X_1(0) = X_1, \\ dX_2(t) &= dt + q_{21}(t)m_1(t) + q_{22}(t)m_2(t) + \\ &\quad p_2(t)dt + \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}}dW_2(t), \quad X_2(0) = X_2, \end{aligned} \quad (4.22)$$



Las gráficas del estado, del estimador del estado, del control y del criterio  $J$  para ambos controladores (RS y LQ) pueden ser vistas en las Figuras 4.1 y 4.2. Puede observarse que las trayectorias para las componentes de  $X(t)$  y  $m(t)$  son similares, lo cuál se debe al valor del parámetro  $\epsilon$ .

Las ecuaciones (4.20), (4.22) son simuladas usando Simulink en *MatLab*7. Las condiciones iniciales para la simulación son  $X_1(0) = 0,1$ ,  $X_2(0) = 1$ ;  $q_{11}(0) = -2,92$ ,  $q_{12}(t) = -0,97$ ,  $q_{22}(t) = -2,356$ , para obtener  $q_{11}(T) = -2$ ,  $q_{12}(T) = 0$ ,  $q_{22}(T) = -2$ ;  $p_1(0) = -1,2115$   $p_2(0) = -0,4485$  para obtener  $p_1(T) = 0$   $p_2(T) = 0$ ;  $T = 0,5seg$ .  $m_1(0) = 0,5$ ,  $m_2(0) = 0,4$ ,  $p_{11}(0) = 65000$ ,  $p_{12}(0) = 45000$ ,  $p_{22}(0) = 55000$ . La relación entre la matriz  $P(t)$  en (4.20) y la matriz  $Q(t)$  en (4.14)

El *Cuadro*4,1 presenta ciertos valores del criterio exponencial-cuadrático para los controladores RS y LQ. Podemos observar que los valores  $J_{r-s}$  son significativamente menores que los valores  $J_{K-B}$  para grandes valores del parámetro *epsilon*.

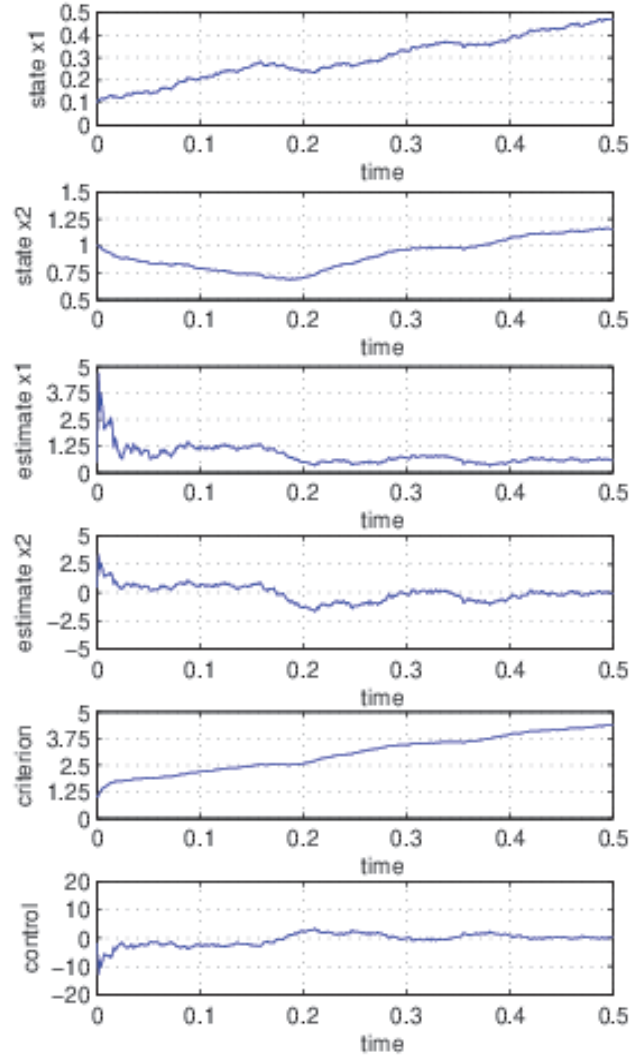


Figura 4.1: Gráficas de la variable de estado  $X(t)$ , del estimador del estado  $m_t$ , control  $u^*$  y criterio  $J$  para el controlador LQ, para  $\epsilon = 100$ ,  $\gamma = 2$ .

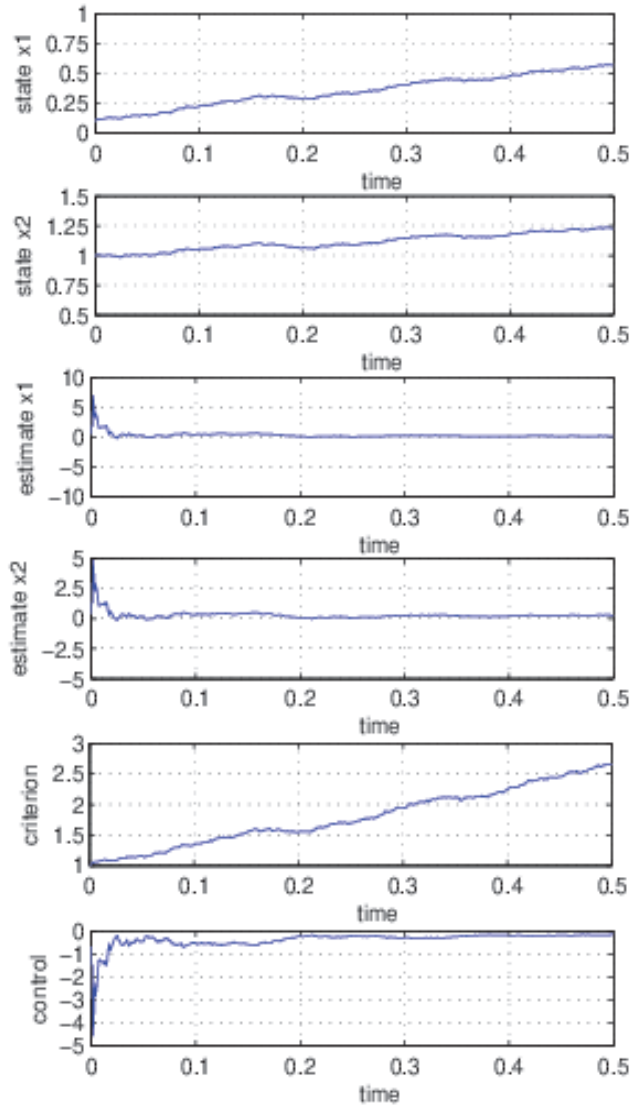


Figura 4.2: Gráficas de la variable de estado  $X(t)$ , del estimador del estado  $m_t$ , control  $u^*$  y criterio  $J$  para el controlador RS, para  $\epsilon = 100$ ,  $\gamma = 2$ .

$\epsilon$ value	$J_{R-S}$	$J_{LQ}$
0,001	2.9787	2.5827
0,01	2.976	2.6962
0,1	2.9674	2.7535
1	2.9406	3.0066
10	2.8603	4.0642
100	2.6491	4.1434
1000	2.4084	4.1434

Cuadro 4.1: Comparación del criterio exponencial-cuadrático para el controlador RS (4.12) (4.14) y el controlador LQ (4.20)

## Capítulo 5

# Control Óptimo RS para Sistemas Estocásticos de Segundo Grado

### 5.1. Regulador Óptimo RS para sistemas polinomiales bilineales

Tomando en cuenta que  $f(t, X(t), u(t)) = A(t) + A_1(t)X(t) + A_2(t)X(t)X^T(t) + B(t)u(t)$ , se obtiene la siguiente ecuación de estado:

$$dX(t) = (A(t) + A_1(t)X(t) + A_2(t)X(t)X^T(t) + B(t)u(t))dt + \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}}(dW)$$
$$X_s = x,$$

donde  $X(t)$ ,  $A(t) \in \mathbf{R}^n$ ,  $A_1(t) \in M_{n \times n}$ , donde  $M_{n \times n}$  denota el campo de matrices de dimensión  $n \times n$ , y  $W$  es como en (4.1). Si  $L(t, X(t)^\epsilon, u) = X^T(t)RX(t) + u^T(t)Su(t)$ ,  $\phi(X_T) = X_T^T \psi X$ , la ecuación del criterio de

costo cuadrático tiene la forma:

$$J^k(s, x, u) = E_{s,x} \exp\left[\frac{1}{\epsilon} \left[ \int_s^T (X(t)^T R X(t) + u(t)^T S u(t)) dt + \phi \right]\right] \quad (5.2)$$

**Teorema:**

La solución al problema de control estocástico, para el sistema dinámico (5.1) con criterio de costo cuadrático (5.2) toma la forma:

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= -A_1(t)P(t) - P(t)A_1(t) - 2A_2(t)P(t)X(t) + 2A_2(t)P(t)C(t) - \\ &\quad P(t)\left(\frac{1}{2}B(t)B^T(t) - \frac{1}{\gamma^2}\right)P^T(t) - 2I \\ \dot{C}(t) &= A(t) + A_1^T(t)C(t) + 2A_2(t)C(t)X(t) - 2A_2(t)C(t)C(t) + \frac{2}{P(t)}C(t), \end{aligned} \quad (5.3)$$

y la ley de control óptimo que minimiza el criterio de costo cuadrático (5.2) está dado por:

$$u^*(t) = -\frac{1}{2}B(t)^T P(t)(X(t) - C(t)). \quad (5.4)$$

**Demostración:** Se propone la función valor:

$$V(s, X) = \frac{1}{2}(X(t) - C(t))^T P(t)(X(t) - C(t)) + r(t) \quad (5.5)$$

(  $C(t)$ ,  $P(t)$ ,  $r(t)$  son funciones de  $t \in [0, T]$ ,  $C(t) \in \mathbf{R}^n$  la cual representa el valor deseado de  $X$  para que sea controlable,  $P(t)$  es una matriz simétrica de dimensión  $n \times n$  y  $r(t)$  es una función escalar) como una solución viscosa

de la ecuación de programación dinámica HJB:

$$0 = V_t + \frac{\epsilon}{2\gamma^2} \sum V_{x_i x_j} + \min_{u \in U} \{ (A(t) + A_1(t)X(t) + A_2(t)X(t)X^T(t) + B(t)u(t)) \nabla_x V + X(t)^2 + u(t)^2 + \frac{1}{2\gamma^2} \nabla V^T \nabla V \} \quad (5.6)$$

$$V(X(t), T) = \phi(X) = X^2$$

donde  $V_t, V_x$  son las derivadas parciales de  $V$  respecto a  $t, x$ , respectivamente, y  $\nabla V$  es el gradiente de  $V$ . Entonces las derivadas parciales de  $V$  estan dadas por:

$$\begin{aligned} V_t &= \frac{1}{2}(X(t) - C(t))^T \dot{P}(t)(X(t) - C(t)) + \dot{r}(t) - \frac{1}{2} \dot{C}(t)^T P(t)(X(t) - C(t)) \\ &\quad - \frac{1}{2}(X(t) - C(t))^T P(t) \dot{C}(t) \\ V_x &= \frac{1}{2} P(t)(X(t) - C(t)) + \frac{1}{2}(X(t) - C(t))^T P(t) \\ V_{xx} &= P(t) \end{aligned}$$

Sustituyendo (5.7) en la ecuación de programación dinámica (5.6):

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}(X(t) - C(t))^T \dot{P}(t)(X(t) - C(t)) + \dot{r}(t) - \frac{1}{2}(X(t) - C(t))^T P(t) \dot{C}(t) \\ &\quad - \frac{1}{2} \dot{C}(t)^T P(t)(X(t) - C(t)) + \frac{\epsilon}{2\gamma^2} P(t) + (A(t) + A_1(t)X(t) + A_2(t)X(t) \cdot \\ &\quad X(t)) P(t)(X(t) - C(t)) - \frac{1}{4}(X(t) - C(t))^T P(t)(B(t)B(t)^T) P(t)(X(t) - \\ &\quad C(t)) + X(t)^2 + \frac{1}{2\gamma^2}(X(t) - C(t))^T P(t) P^T(t)(X(t) - C(t)). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Agrupando los términos de  $X^T(t)X(t)$ , la primer ecuación de (5.3) es obtenida. Agrupando los términos de  $X(t)$  se obtiene la segunda ecuación

de (5.3). En forma similar para los términos independientes de  $X(t)$ , la siguiente ecuación es obtenida:

$$\begin{aligned} \dot{r}(t) = & -\frac{3}{8}C(t)^T P(t)(B(t)B(t)^T)P(t)C(t) + \frac{1}{2}C(t)^T A(t)P(t)C(t) - \\ & \frac{1}{2}C(t)^T A_1(t)P(t)C(t) - C(t)C^T(t) - \frac{\epsilon}{2\gamma^2} \sum_{i,j=1}^n p_{ij}, \end{aligned}$$

donde  $p_{ij}$  son los elementos de la matriz  $P(t)$ .

La ley de control óptimo (5.4) que minimiza el criterio de costo cuadrático (5.2) toma la forma:

$$\min_{u \in U} \{f^k(t, X(t), u(t))\nabla_x V + L^k(t, X(t), u_t) + \frac{1}{2\gamma^2} \nabla V^T \nabla V\} \diamond.$$

## 5.2. Aplicación

Considere el siguiente sistema estocástico asociado a un tanque reactor de agitado permanente en el cual ocurre una reacción química. Esta reacción es en fase líquida y tiene un carácter isotérmico sobre multicomponentes [60]

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= -(1 + D_{\alpha 1})X_1 + u \\ \dot{X}_2 &= D_{\alpha 1}X_1 - X_2 - D_{\alpha 2}X_2^2 \end{aligned} \tag{5.9}$$

donde  $X_1$  representa la concentración no normalizada de cierta especie  $P$  del reactor ( $lb_{mol}/pie^3$ ) [126],  $X_2$  representa la concentración no normaliza-



da de certa especie  $Q$  ( $lb_{mol}/pie^3$ ). La variable de control  $u$  esta definida como la relación entre la tasa de alimentación molar por unidad volumétrica de  $P$  y la concentración nominal;  $t$  representa el tiempo en minutos,  $D_{\alpha 1} = 1$ ,  $D_{\alpha 2} = 1$ . Considerando (5.9), se obtiene el siguiente sistema dinámico estocástico:

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= -2X_1 + u_t + \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}}dW_{1t} \\ \dot{X}_2 &= X_1 - X_2 - X_2^2 + \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}}dW_{2t}.\end{aligned}\tag{5.10}$$

Se pretende obtener la ley de control óptimo  $u^*$  la cual minimice el criterio exponencial cuadrático, el cual en este caso representaría la energía utilizada al mezclar dos componentes químicos, cuya concentración disminuye al irse mezclando.

Aplicando las ecuaciones (5.3), (5.4) al sistema (5.10), se obtienen las

siguientes ecuaciones de control óptimo RS:

$$\begin{aligned}
\dot{p}_{11} &= 4p_{11} - 2p_{12} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma^2}\right)p_{11}^2 - \frac{1}{\gamma^2}p_{12}^2 - 2, \\
\dot{p}_{12} &= 3p_{11} - p_{22} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma^2}\right)p_{11}p_{12} - \frac{1}{\gamma^2}p_{12}p_{22}, \\
\dot{p}_{22} &= 2p_{22} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma^2}\right)p_{12}^2 - \frac{1}{\gamma^2}p_{22}^2 + 2p_{12}X_1 \\
&\quad + 2p_{22}X_2 - 2p_{12}C_1 - 2p_{22}C_2 - 2, \\
\dot{C}_1 &= -2C_1 + \frac{2(p_{22}C_1 - p_{12}C_2)}{p_{22}p_{11} - p_{12}^2}, \\
\dot{C}_2 &= C_1 - C_2 - 2C_2X_2 + 2C_2^2 + \frac{2(p_{11}C_2 - p_{12}C_1)}{p_{22}p_{11} - p_{12}^2},
\end{aligned} \tag{5.11}$$

donde  $G$ ,  $R$  son matrices identidad  $I_{2 \times 2}$ , con las condiciones finales  $C_1(0,5) = 0$ ,  $C_2(0,5) = 0$ ,  $P_{11}(0,5) = 1$ ,  $P_{12}(0,5) = 0$ ,  $P_{22}(0) = 1$ .

La ley de control óptimo está dada por:

$$\begin{aligned}
u_1^* &= \frac{-1}{2}(p_{11}(X_1 - C_1) + p_{12}(X_2 - C_2)), \\
u_2^* &= 0.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Los valores óptimos de las concentraciones  $X_1$ ,  $X_2$  son obtenidas sustituyendo la ley de control óptimo (5.12) en (5.10):

$$\begin{aligned}
\dot{X}_1 &= -(1 + D_{\alpha 1})X_1 - \frac{1}{2}(p_{11}(X_1 - C_1) + \\
&\quad p_{12}(X_2 - C_2)) + \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}}dW_{1t}, \\
\dot{X}_2 &= D_{\alpha 1}X_1 - X_2 - D_{\alpha 2}X_2^2 + \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}}dW_{2t}.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Las condiciones iniciales para  $X$  son:  $X_1(0) = 2$ ,  $X_2(0) = 10$ . El sistema formado por las ecuaciones (5.12), y (5.10) es simulado usando Simulink en MatLab 7 y aplicando el método de Monte Carlo. El rendimiento de los algoritmos diseñados es comparado contra los algoritmos del control bilineal [77], aplicado al sistema (5.10), que es óptimo con respecto al criterio cuadrático convencional. Las ecuaciones correspondientes están dadas por:

$$\begin{aligned}\dot{q}_{11} &= 2 + 4q_{11} - 2q_{12} - q_{11}^2, \\ \dot{q}_{12} &= 3q_{12} - q_{22} + 2q_{12}X_2 - q_{11}q_{12}, \\ \dot{q}_{22} &= 2 + 2q_{22} + 4q_{22}X_2 - q_{12}^2,\end{aligned}\tag{5.14}$$

con las condiciones finales  $q_{11}(0,5) = -2$ ,  $q_{12}(0,5) = 0$ ,  $q_{22}(0) = -2$ . La ley de control está dada por:

$$\begin{aligned}u_1^* &= \frac{1}{2}q_{11}X_1 + q_{12}X_2, \\ u_2^* &= 0,\end{aligned}\tag{5.15}$$

y los correspondientes valores de concentración que satisfacen las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= -(1 + D_{\alpha 1})X_1 + \frac{1}{2}q_{11}X_1 + q_{12}X_2 + \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}}dW_{1t}, \\ \dot{X}_2 &= D_{\alpha 1}X_1 - X_2 - D_{\alpha 2}X_2^2 + \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}}dW_{2t}.\end{aligned}\tag{5.16}$$

Epsilon	Poly.	R-S.
0,1	7.912	7.8424
1	7.8903	7.8199
10	7.8223	7.749
100	7.6126	7.5305
1000	7.0046	6.8952
10000	5.6576	5.4689
100000	8.4357	8.0822

Cuadro 5.1: Valores del criterio exponencial-cuadrático para el control RS y control bilineal, correspondiente a ciertos valores del parámetro  $\epsilon$ .

La tabla 5.1, muestra los valores del criterio de costo cuadrático obtenidos para diferentes valores del parámetro  $\epsilon$ , y se puede ver que los valores para el control óptimo RS son mas pequeños para cualquier  $\epsilon$  de aquí la eficacia de éste método.

Las figuras 5.1 y 5.2 muestran las gráficas de los estados  $X_1, X_2$ , el control óptimo  $u_t^*$ , y el criterio exponencial cuadrático  $J$  para ambos algoritmos aplicados. En la gráfica del estado se considera que la parte negativa representa que no se encuentra cantidad de concentración de las especies P y Q.

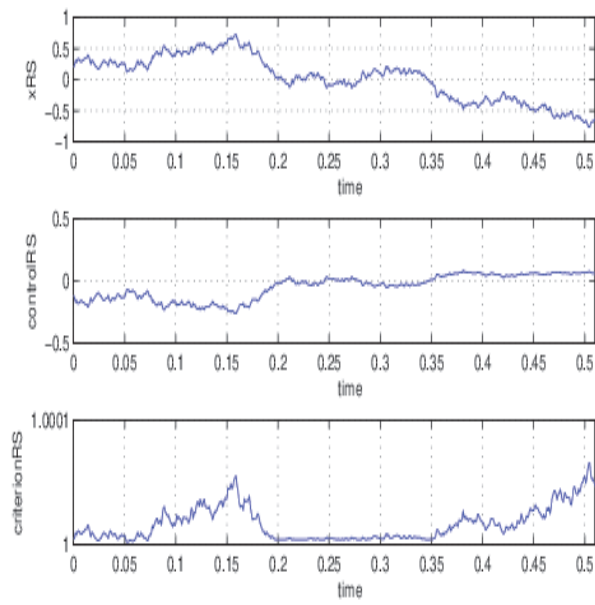


Figura 5.1: Gráficas del estado, control y criterio para el Control RS para  $\epsilon = 10000$ .

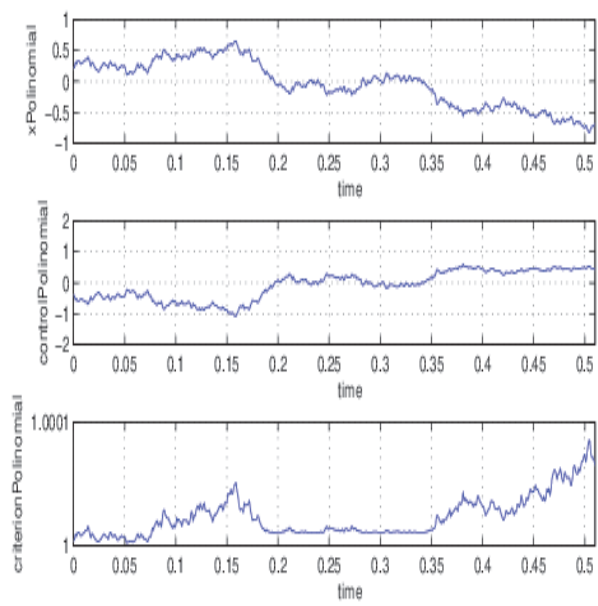


Figura 5.2: Gráficas del estado, control y criterio para el Control polinomial para  $\epsilon = 10000$ .

## Capítulo 6

# Control Óptimo RS para Sistemas Polinomiales de Tercer Grado

### 6.1. Regulador óptimo RS para el estado polinomial de tercer grado

Tomando en cuenta que  $f(t, X(t), u(t)) = A(t) + A_1(t)X(t) + A_2(t)X(t)X(t)^T + A_3(t)X(t)X^T(t)X^T(t) + B(t)u(t)$ , se obtiene la siguiente ecuación del estado

$$\begin{aligned} dX(t) &= (A(t) + A_1(t)X(t) + A_2(t)X(t)X^T(t) + \\ &\quad A_3(t)X(t)X^T(t)X^T(t) + B(t)u(t))dt + \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}}dW, \\ X(t) &= x, \end{aligned} \tag{6.1}$$

donde  $X(t), A(t) \in \mathbf{R}^n$ ,  $A_1(t) \in M_{n \times n}$ ,  $A_2(t) \in M_{n \times n \times n}$  y  $A_3(t) \in M_{n \times n \times n \times n}$ ,  $M_{n \times n}$  denota el campo de las matrices de dimensión  $n \times n$ ,

$M_{n \times n \times n}$  denota los tensores de dimensión  $n \times n \times n$ ,  $M_{n \times n \times n \times n}$  denota el tensor de dimensión  $n \times n \times n \times n$ . Si  $L(t, X(t)^\epsilon, u) = X(t)^T G X(t) + u(t)^T R u(t)$ ,  $\psi(X(T)) = X_T^T \phi X$ , el criterio de costo exponencial cuadrático tiene la forma:

$$J(s, X(t), u) = \epsilon \log E_{s,x} \exp \left[ \frac{1}{\epsilon} \left[ \int_s^T (X(t)^T G X(t) + u(t)^T R u(t)) dt + \psi \right] \right] \quad (6.2)$$

donde  $G$ ,  $\phi$  son matrices reales simétricas semi-definidas positivas,  $R$  es una matriz real simétrica definida positiva.

### Teorema

La solución del problema de control óptimo estocástico para el sistema dinámico (6.1) con el criterio (6.2) toma la forma:

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= -2A_1(t)P(t) - 2A_2(t)P(t)X(t) + 2A_2(t)P(t)C(t) \quad (6.3) \\ &\quad + \frac{1}{2}B(t)B(t)^T P(t)^T P(t) - \frac{1}{\gamma^2} P(t)^T P(t) - 2I \\ &\quad + A_3(t)P(t)C(t)X(t) - A_3(t)P(t)X(t)X(t)^T \\ \dot{C}(t) &= -2P^{-1}(t)C(t)\dot{P}(t) + A_0(t) - A_1(t)C(t) + \\ &\quad \frac{1}{2}B(t)B^T(t)P(t)C(t) - \frac{1}{\gamma^2} P(t)C(t) \end{aligned}$$



donde  $I$  es la matriz identidad de dimensión  $n \times n$ . La ley de control óptimo que minimiza el criterio de costo exponencial cuadrático (6.2) está dado por:

$$u^*(t) = -\frac{1}{2}B^T(t)P(t)R^{-1}(X(t) - C(t)). \quad (6.4)$$

**Demostración:** Se propone la función valor

$$V(t, X(t)) = \frac{1}{2}(X(t) - C(t))^T P(t)(X(t) - C(t)) + r(t) \quad (6.5)$$

( $C(t), P(t), r(t)$  son funciones de  $s \in [0, T]$ ,  $C(t) \in \mathbf{R}^n$ ,  $P(t)$  es una matriz simétrica de dimensión  $n \times n$  y  $r(t)$  es una función escalar) como una solución viscosa de la ecuación de programación dinámica

$$\begin{aligned} 0 = & V_t + \frac{\epsilon}{2\gamma^2} \sum V_{x_i x_j} + \min_{u \in U} \{ (A(t) + A_1(t)X(t) \\ & + A_2(t)X(t)X^T(t) + A_3(t)X(t)X^T(t)X^T(t) + \\ & B(t)u(t))^T \nabla_x V + X(t)^T G X(t) + \\ & u^T(t) R u(t) + \frac{1}{2\gamma^2} \nabla V^T \nabla V \} \\ V(X(t), T) = & \psi(X(t)) = X^T(t) \phi X(t) \end{aligned} \quad (6.6)$$

donde  $V_t, V_x$  son las derivadas parciales de  $V$  con respecto a  $t, x$ , respectivamente, y  $\nabla V$  es el gradiente de  $V$ . Entonces, las derivadas parciales de

$V$  estan dadas por:

$$\begin{aligned}
V_t &= \frac{1}{2}(X(t) - C(t))^T \dot{P}(t)(X(t) - C(t)) + \dot{r}(t) - \\
&\quad \frac{1}{2}\dot{C}^T(t)P(t)(X(t) - C(t)) - \\
&\quad \frac{1}{2}(X(t) - C^T(t))P(t)\dot{C}(t) \\
V_x &= \frac{1}{2}P(t)(X(t) - C(t)) + \frac{1}{2}(X(t) - C^T(t))P(t) \\
V_{xx} &= P(t)
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Sustituyendo (6.7) en la ecuación de programación dinámica (6.6):

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2}(X(t) - C(t))^T \dot{P}(t)(X(t) - C(t)) + \dot{r}(t) - \\
&\quad \frac{1}{2}(X(t) - C(t))^T P(t)\dot{C}(t) - \frac{1}{2}\dot{C}^T(t)P(t)(X(t) - C(t)) \\
&\quad + \frac{\epsilon}{2\gamma^2} \sum P(t) + (A(t) + A_1(t)X(t) + A_2(t)X(t)X(t)^T \\
&\quad + A_3(t)X(t)X(t)^T X(t) + B(t)(-\frac{1}{2}B(t)P(t)(X(t) \\
&\quad - C(t)))^T P(t)(X(t) - C(t)) + \frac{1}{4}(X(t) - C(t))^T P(t) \\
&\quad (B(t)B^T(t))P(t)(X(t) - C(t)) + X^T(t)X(t) + \frac{1}{2\gamma^2}(X(t) \\
&\quad - C(t))^T P(t)P^T(t)(X(t) - C(t)).
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Agrupando los términos de  $X(t)X^T(t)$ ,  $X(t)X^T(t)X^T(t)$  y se obtiene la primer ecuación de (6.3). Agrupando los términos de  $X(t)$  se obtiene la segunda ecuación de (6.3). De la misma forma se agrupan los términos

independientes de  $X(t)$  para obtener la siguiente ecuación.

$$\begin{aligned} \dot{r}(t) = & -\frac{3}{8}C(t)^T P(t)(B(t)B(t)^T)P(t)C(t) + \\ & \frac{C(t)^T A(t)P(t)C(t)}{2} - \frac{C(t)^T A_1(t)P(t)C(t)}{2} - \\ & C(t)C(t)^T - \frac{\epsilon}{2\gamma^2} \sum_{i,j=1}^n p_{ij}, \end{aligned}$$

donde  $p_{ij}$  son los elementos de la matriz  $P(t)$ .

La ley de control óptimo (6.4) que minimiza el criterio de costo exponencial cuadrático (6.2) se obtiene de la condición:

$$\min_{u \in U} \{f^k(t, X(t), u(t)) \nabla_x V + L^k(t, X(t), u(t)) + \frac{1}{2\gamma^2} \nabla V^T \nabla V\} \diamond.$$

## 6.2. Aplicación Satélite Monoaxial

Las ecuaciones de control óptimo RS para sistemas polinomiales de tercer grado se aplicarán al modelo de un satélite monoaxial. Este modelo esta asociado con el problema de orientación de un satélite monoaxial en el cual el ángulo de orientación es medido a través de la representación de Cayley-Rodrigues [60]. La descripción es como sigue: es un objeto que gira alrededor de un eje fijo sin impulsos de gravedad por torques. Estos torques son producidos por la explosión controlada de los gases, a través de un sistema de mini motores de reacción a adaptarse al objeto y la subasta

en forma opuesta, como se puede ver en la Figura 6.1.

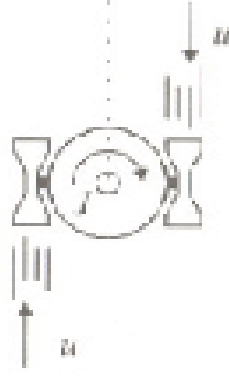


Figura 6.1: Satélite monoaxial.

Las ecuaciones de estado para este modelo están dadas por:

$$\begin{aligned}\dot{X}_1(t) &= 0,5(1 + X_1^2(t))X_2(t) + \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}}dW_1(t) \\ \dot{X}_2(t) &= \frac{1}{J}u(t) + \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}}dW_2(t),\end{aligned}\tag{6.9}$$

donde  $X_1(t)$  representa el ángulo de orientación del satélite, éste es medido respecto a un eje oblicuo el cual no es coincidente con el eje principal.  $X_2(t)$  es la velocidad angular con respecto al eje principal. La variable de control  $u$  representa el torque aplicado.  $\mathcal{J}$  representa el momento de inercia de un disco y está dado por  $\mathcal{J} = \frac{1}{2}mr^2$ ,  $m$  es la masa del objeto y  $r$  es el radio. En este caso consideramos  $m = 1$ ,  $r = 1$ . El problema de control óptimo consiste en obtener la ley de control  $u^*(t)$ , que minimice la energía usada por el torque, representada por la ecuación (6.2). Aplicando las ecuaciones

(6.3), (6.4) al sistema (6.9), se obtienen las siguientes ecuaciones del control óptimo RS:

$$\begin{aligned}
\dot{p}_{11} &= -p_{21} - \frac{1}{\gamma^2}(p_{11}^2 + p_{21}^2 - 2) \\
\dot{p}_{12} &= -p_{22} - \frac{1}{\gamma^2}(p_{11}p_{12} + p_{21}p_{22}) + \\
&\quad 0,5p_{21}X_2X_1 + 0,5p_{21}C_2X_1, \\
\dot{p}_{21} &= \left(\frac{1}{2J^2}\right)(p_{21}p_{11} + p_{22}p_{21}) - \frac{1}{\gamma^2}(p_{21}p_{11} + p_{22}p_{21}) \\
\dot{p}_{22} &= \left(\frac{1}{2J^2}\right)(p_{21}p_{12} + p_{22}^2) - \frac{1}{\gamma^2}(p_{12}^2 + p_{22}^2) - 2 \\
\dot{C}_1 &= \frac{-2}{p_{22}p_{11} - p_{12}^2} [p_{22}C_1(-p_{21} - \\
&\quad \frac{1}{\gamma^2}(p_{11}^2 + p_{21}^2) - 2 + p_{11}C_1X_1 + \\
&\quad p_{12}C_2X_2 - p_{11}X_1X_2 + p_{12}X_2^2) + p_{22}C_2(-p_{22} - \\
&\quad \frac{1}{\gamma^2}(p_{11}p_{12} + p_{21}p_{22})) - p_{12}C_1(\frac{1}{2J^2}(p_{11}p_{12} + \\
&\quad p_{21}p_{22}) - \frac{1}{\gamma^2}(p_{11}p_{12} + p_{21}p_{22})) - \\
&\quad p_{12}C_2(\frac{1}{2J^2}(p_{12}^2 + p_{22}^2) - \frac{1}{\gamma^2}(p_{12}^2 + p_{22}^2) - 2)] \\
&\quad - 0,5C_2 - \frac{1}{\gamma^2}(p_{11}C_1 + p_{12}C_2)
\end{aligned} \tag{6.10}$$

$$\begin{aligned}
\dot{C}_2 = & \frac{-2}{p_{22}p_{11} - p_{12}^2} [-p_{21}C_1(-p_{21} - \\
& \frac{1}{\gamma^2}(p_{11}^2 + p_{21}^2) - 2 + p_{11}C_1X_1 + \\
& p_{12}C_2X_2 - p_{11}X_1X_2 + p_{12}X_2^2) - p_{12}C_2(-p_{22} - \\
& \frac{1}{\gamma^2}(p_{11}p_{12} + p_{21}p_{22})) + p_{11}C_1(\frac{1}{2J^2}(p_{11}p_{12} + \\
& p_{21}p_{22}) - \frac{1}{\gamma^2}(p_{11}p_{12} + p_{21}p_{22})) + \\
& p_{11}C_2(\frac{1}{2J^2}(p_{12}^2 + p_{22}^2) - \frac{1}{\gamma^2}(p_{12}^2 + p_{22}^2) - 2)] \\
& + \frac{1}{2J^2}(p_{21}C_1 + p_{22}C_2) - \frac{1}{\gamma^2}(p_{21}C_1 + p_{22}C_2),
\end{aligned}$$

donde  $G$ ,  $R$  son matrices identidad  $I_{2 \times 2}$ , con las condiciones iniciales:  $C_1(0) = 0$ ,  $C_2(0) = 0$ ,  $P_{11}(0) = 0,5995$ ,  $P_{12}(0) = 0,1195$ ,  $P_{22}(0) = 0,1945$  para obtener las siguientes condiciones finales:  $C_1(0,5) = 0$ ,  $C_2(0,5) = 0$ ,  $P_{11}(0,5) = 1$ ,  $P_{12}(0,5) = 0$ ,  $P_{22}(0,5) = 1$ . La ley de control óptimo está dada por:

$$\begin{aligned}
u_2(t)^* &= \frac{-1}{2J}(p_{21}(X_1 - C_1) + p_{22}(X_2 - C_2)), \\
u_1^* &= 0.
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Los valores óptimos del ángulo y velocidad respectivamente,  $X_1(t)$ ,  $X_2(t)$

son obtenidos sustituyendo la ley de control óptimo (6.11) en (5.10):

$$\begin{aligned}\dot{X}_1(t) &= 0,5(1 + X_1^2(t))X_2(t) + \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}}dW_1(t), \\ \dot{X}_2(t) &= \frac{-1}{2J^2}(p_{21}(X_1 - C_1) + p_{22}(X_2 - C_2)) + \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}}dW_2(t).\end{aligned}\tag{6.12}$$

Las condiciones iniciales para  $X$  son:  $X_1(0) = 0,2$ ,  $X_2(0) = 7$ . El sistema formado por las ecuaciones (6.11) y (6.9) es simulado usando Simulink en MatLab7 y aplicando el método de Monte Carlo. El rendimiento del diseño de las ecuaciones del control óptimo RS es comparado con las ecuaciones del control de tercer grado [77], aplicadas al sistema (6.9), que es óptimo con respecto al criterio convencional cuadrático. Las ecuaciones correspondientes están dadas por:

$$\begin{aligned}\dot{Q}_{11} &= -1 - \left(\frac{1}{J^2}\right)Q_{12}Q_{21}, \\ \dot{Q}_{12} &= -(0,5 + 0,5X_2X_1)Q_{11} - \left(\frac{1}{J^2}\right)Q_{12}Q_{22}, \\ \dot{Q}_{21} &= -(0,5 + 1,5X_2X_1)Q_{11} - \left(\frac{1}{J^2}\right)Q_{22}Q_{21}, \\ \dot{Q}_{22} &= 1 - (0,5 + 1,5X_2X_1)Q_{12} - (0,5 + 0,5X_2X_1)Q_{21} \\ &\quad - \left(\frac{1}{J^2}\right)Q_{22}^2,\end{aligned}\tag{6.13}$$

con las condiciones finales:  $Q_{11}(0,4) = -2$ ,  $Q_{12}(0,4) = 0$ ,  $Q_{21}(0,4) = 0$  y

$Q_{22}(0,4) = -2$ . La ley de control está dada por:

$$\begin{aligned} u_2^* &= 2(Q_{21}X_1 + Q_{22}X_2), \\ u_1^* &= 0, \end{aligned} \tag{6.14}$$

y los valores correspondientes al ángulo y velocidad que satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{X}_1(t) &= 0,5(1 + X_1^2(t))X_2(t) + \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}}dW_1(t), \\ \dot{X}_2(t) &= \frac{1}{J}2(Q_{21}X_1 + q_{22}X_2) + \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}}dW_2(t). \end{aligned}$$

La tabla 6.1 muestra los valores del criterio exponencial cuadrático para diferentes valores del parámetro  $\epsilon$  y se puede verificar la eficacia del método RS.

Las figuras 6.2 y 6.3 muestran las gráficas de los estados  $X_1, X_2$ , el control óptimo  $u_t^*$ , y el criterio exponencial cuadrático  $J$  para los dos métodos.



$\epsilon$	JR-S	J Tercer grado
0,1	30.0154	32.4430
1	30.0468	32.4718
10	31.1466	32.5637
100	32.4689	32.8603
1000	33.5580	33.8654
10000	37.9024	37.8965

Cuadro 6.1: Valores del criterio exponencial cuadrático para el Control RS, Control Polinomial de Tercer Grado, tomando valores diferentes del parámetro  $\epsilon$ .

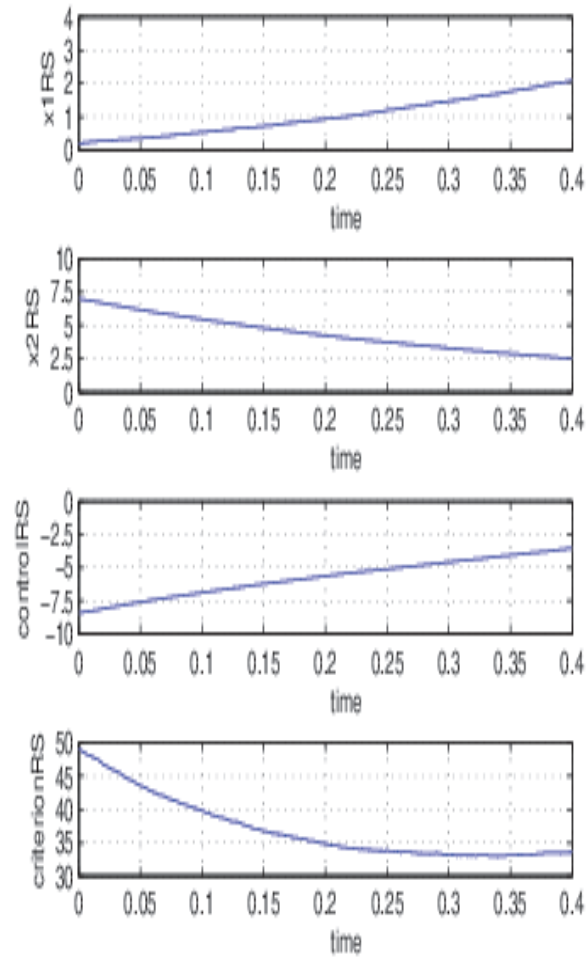


Figura 6.2: Gráficas del estado, control y criterio correspondientes al regulador RS para  $\epsilon = 1000$ .

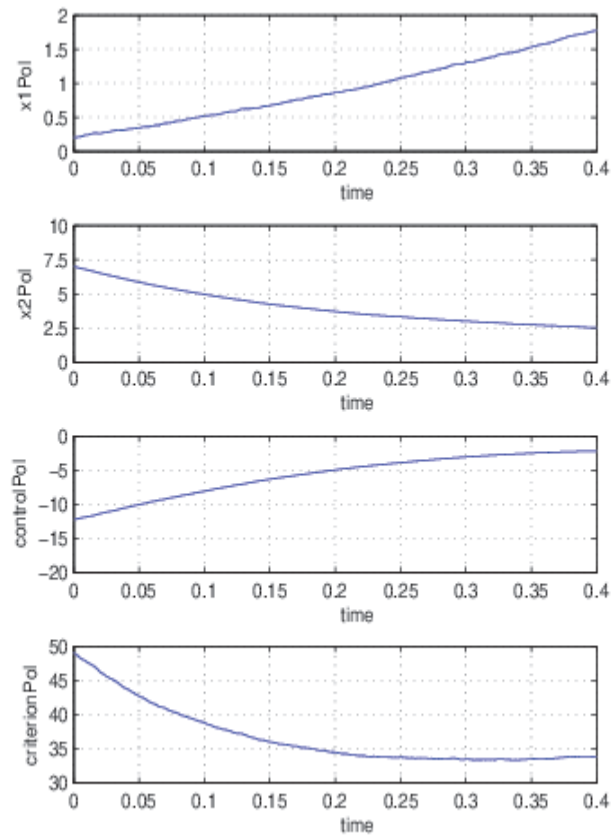


Figura 6.3: Gráficas del estado, control y criterio correspondientes al regulador polinomial del tercer grado para  $\epsilon = 1000$ .

## Capítulo 7

# Control sub-óptimo estocástico RS híbrido $H_2/H_\infty$ para sistemas polinomiales de primer grado

### 7.1. Planteamiento del problema

El planteamiento del problema es similar al problema visto en el capítulo 4.

### 7.2. Control sub óptimo RS híbrido $H_2/H_\infty$

De acuerdo con [105] consideramos un sistema no lineal descrito por las siguientes ecuaciones de la forma:

$$\dot{x}(t) = f(x, t) + Bu(t) + \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}} dW_1(t) \quad (7.1)$$

$$y(t) = hx + B_1u(t) \quad (7.2)$$

$$z(t) = h_\infty x + B_\infty u(t) \quad (7.3)$$

Donde la primera ecuación representa un sistema dinámico  $x(t) \in R^n$ , con entrada de control  $u(t) \in R^p$ , y entrada de difusión  $dW_1(t) \in (\ell_2)^P[0, \infty)$ . La segunda y tercera ecuación definen dos variables de desempeño  $y \in R^{n_1}$  y  $z(t) \in R^{n_2}$ , que no dependen del término de difusión  $dW_1(x) \in (\ell_2)^P[0, \infty)$  (como puede verse en la tabla 7.1). Las siguientes suposiciones son verdaderas para (7.2):  $x = 0$  es un punto de equilibrio,  $h(0) = 0$  y  $h_\infty = 0$ . Además la derivada  $f(x, t)$  en (7.1) contiene las no linealidades del sistema dinámico y  $B, hx, B_1, h_\infty x, B_\infty$ , son matrices constantes que pueden ser consideradas como transformaciones lineales suaves y deben satisfacer lo siguiente [105]:

$$h \text{ y } B_1 \text{ satisfacen } h'xB_1 = 0, \quad B_1'B_1 = I. \quad (7.4)$$

*El par  $\{f(x, t), B_1\}$  es estado – cero detectable.*

Considerando que la ley de control RS de retroalimentación de estado  $u = u(t)$  es admisible si  $\dot{x}(t) = f(x, t) + B(t)u(t)$  es localmente asintóticamente estable. Además, es la solución del control óptimo RS de  $H_2$  (7.2), (7.3) y minimiza:

$$J_2(u) = \epsilon \log e^{\frac{1}{\epsilon} \int_0^\infty \|y(x(t))\|^2 dt} = \int_0^\infty \|y(x(t))\|^2 dt \quad (7.5)$$

donde  $dW \equiv 0$ . Dado  $\lambda_1 > 0$ , el problema de control RS  $H_\infty$  consiste en encontrar un control RS admisible  $u = u(x)$ , con un nivel de atenuación  $\lambda_1$  para el sistema (7.1), (7.2), (7.3), que contiene:

$$J_\infty(u, \lambda) = \epsilon \text{Log} E e^{\frac{1}{\epsilon} \int_0^\infty \|z(x, u, t)\|^2 dt} - \lambda_1^2 \epsilon \text{Log} E e^{\frac{1}{\epsilon} \int_0^\infty \|dW(t)\|^2 dt} \leq 0. \quad (7.6)$$

con  $x(0) = 0$ . El objetivo del problema de control sub-óptimo RS híbrido  $H_2/H_\infty$  es (ver [105]) encontrar una retroalimentación de estado admisible de la ley de control  $u = u(x)$  resolviendo el problema de optimización

$$\min_u J_2(u) \text{ sujeto a } J_\infty \leq 0. \quad (7.7)$$

Aquí, la desigualdad (7.6) depende de  $\lambda_1$ . Si el parámetro  $\lambda_1$  mantiene la igualdad en (7.6),  $J_\infty(u_{opt}, \lambda_1) = 0$  luego otros valores  $\lambda_2 < \lambda_1$  indicará que

$u = u_{opt}(x)$  es una solución sin restricciones del problema de control de RS óptimo ( $J_{\infty}(u_{opt}, \lambda_2) > 0$ ). En la aplicación, es encontrar los valores de  $\lambda_1$  para la igualdad en (7.6), aplicando un control RS  $u(t)$ .

### 7.2.1. Aplicación

### 7.2.2. Descripción del modelo

Tanto  $(M)$  como  $(M\phi)$  se originan a partir de una célula progenitora mieloide común en la médula ósea. En circunstancias normales,  $(M)$  circula en el torrente sanguíneo durante muy poco tiempo antes de pasar por la apoptosis espontánea, [111]. En respuesta a la diferenciación de factores,  $(M)$  escapan a su destino apoptótico al diferenciarse en  $(M_{\phi})$ , células con una vida útil mas larga que se encuentran en casi todos los órganos, [112]. Las células  $(M)$  son los leucocitos mas grandes que pueden observarse en los frotis de sangre y pueden alcanzar 12 a 20nm de diámetro con un núcleo ovalado. Las células  $(M)$  se originan en la médula ósea. Luego parten para la circulación sanguínea. Algunas de estas células se encuentran en los tejidos como los sinusoides hepáticos del bazo, que forma parte del sistema fagocítico mononuclear. La función de  $(M)$  y  $(M_{\phi})$  no es solo como fagocítica; la  $(M)$  y  $(M_{\phi})$  son células imprescindibles para que el sistema inmunológico pueda mantenerse funcionando adecuadamente y

producen citocinesis (IL-1 , IL-6 y TNF) como puede verse en [113]. ( $M$ ) y ( $M_\phi$ ) son células centrales del sistema inmunológico innato, encargadas de defender al cuerpo humano contra diversos patógenos. Comprenden lo que recientemente se reconoció como una familia heterogénea de células fagocíticas profesionales responsables del reconocimiento y eliminación de patógenos y células muertas, como se muestra en [114]. Las células ( $M$ ) y ( $M_\phi$ ) juegan un papel central en el inicio y resolución de la inflamación, principalmente a través de la fagocitosis, la liberación de citocinesis inflamatoria, especies reactivas de oxígeno (ROS) y la activación del sistema inmunológico adquirido, [115]. Aunque las células ( $M$ ) representan una parte importante de la defensa del huésped, la acumulación de células ( $M$ ) puede ser dañina y agravar enfermedades como aterosclerosis, artritis y esclerosis múltiple, [116]. Recientemente, la diferenciación de ( $M$ )/( $M_\phi$ ) juega un papel biológico fundamental en el desarrollo, la cicatrización de heridas, la homeostasis tisular e incluso la progresión del cáncer generan una necesidad por comprender los mecanismos moleculares que determinan su duración de vida y el destino celular. El exceso en la producción de ( $M$ ) se llama: Monocitosis. Es un indicador de enfermedades como enfermedad inflamatoria crónica, infección parasitaria, tuberculosis, infección viral, puede ver en [113]. La baja producción de ( $M$ ) se llama Monocitope-



nia. Un recuento bajo de células sanguíneas ( $M$ ) aumenta la susceptibilidad a las infecciones. El grado de aumento del riesgo depende de la gravedad y la causa de la monocitopenia, así como de la condición médica general del paciente. El sistema de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de dos dimensiones que describe la dinámica poblacional de ( $M$ ) y ( $M_\phi$ ) en el tiempo [117], [118] está dado por:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= \lambda - \mu_1 x_1(t) - \phi x_1(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= \phi x_1(t) - \mu_2 x_2(t).\end{aligned}\tag{7.8}$$

donde  $x_1(t), x_2(t)$  representan la población ( $M$ ) y ( $M_\phi$ ) respectivamente en el momento  $t$ . El parámetro  $\lambda$  es el índice de producción de ( $M$ ), aproximadamente  $11,000 \text{ celdas/seg}$ ; ver [119]. Las células ( $M$ ) permanecen en la médula ósea menos de 24 h, luego pasa al torrente sanguíneo y se distribuyen por todo el cuerpo. En un adulto sano normal, la vida media de ( $M$ ), denotada por  $1/\mu_1$ , está entre 8 y 72 horas, ver [119]; [120]. Los macrófagos tienen una vida media denotado por  $1/\mu_2$  de 3 a 6 semanas, ver [120] y se reemplazan en un índice del 1 por ciento para cada día. Cuando ( $M$ ) sale de los capilares sanguíneos y están ubicados en los tejidos, son transformados en ( $M_\phi$ ). El paso de índice de ( $M$ ) a ( $M_\phi$ ) se denota por  $1/\phi$  suele ser de 8 a 12 horas, consulte [120]. Las condiciones iniciales

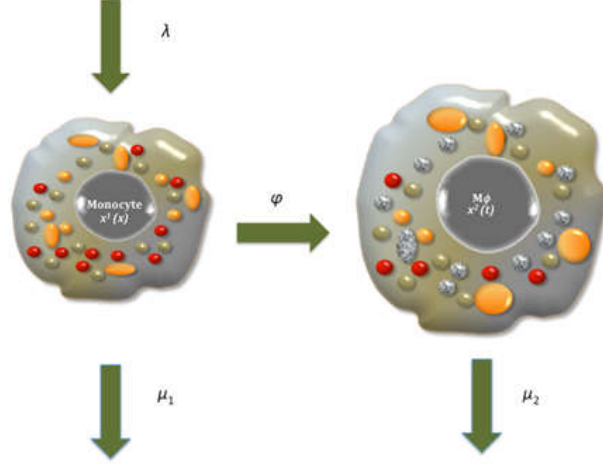


Figura 7.1: Dynamical of the population of monocytes and macrophages.

son  $x_1(0) = x_{01}, x_2(0) = x_{02}$ . La figura 7.1 ilustra el mecanismo de diferenciación de monocitos a macrófagos. En este modelo, se consideró que los macrófagos se derivan únicamente de monocitos.

La solución de (7.8) está dada por [92]:

$$x_{1max} = \frac{\lambda}{\mu_1 + \phi} \quad (7.9)$$

$$x_{2max} = \frac{\lambda\phi}{(\mu_1 + \phi)\mu_2} \quad (7.10)$$

Estas son las soluciones del estado de equilibrio libre de infección. Además de la representación matricial a partir de (7.8)

$$A_0 = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\mu_1 - \phi & 0 \\ \phi & -\mu_2 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de  $A$ , obtenidos como las raíces del polinomio  $\det[A - \lambda I] = 0$  son dados por  $\Lambda_1 = -\mu_2$ ,  $\Lambda_2 = -\mu_1 - \phi$ , esto indica que el estado de equilibrio libre de infección es localmente asintóticamente estable. Dado que las condiciones iniciales del estado son grandes ( $\times 10^{10}$ ), es difícil de apreciar a simple vista, si los valores asintóticos se alcanzaron en el gráfico. Como solución a este problema, la transformación del registro (logarítmica en base transformación 10) se aplicó a la trama de los estados ( $x_1(t)$ ), control ( $u(t)$ ), Criterio, ( $J$ ) y errores. El comportamiento de los estados en condiciones normales, sin perturbaciones y libres de infección, se pueden ver en Figura 7.2. Las condiciones iniciales para el estado (ver [118]) son:  $x_1(0) = 0,1584 \times 10^9$ ,  $x_2(0) = 0,16528 \times 10^{10}$ ;  $\text{Log}(x_1(0)) = (0,1584 \times 10^{10}) = 8,199$ ,  $\text{Log}(x_2(0)) = \text{Log}(0,16528 \times 10^{10}) = 9,21822030417$ . Los valores de los parámetros  $(\mu_1, \mu_2, \phi)$  en (7.8) son fijos y se toman de la Tabla 7.2 . Sustituyendo los valores de los parámetros  $\lambda = 39600000$ ,  $\mu_1 = 0,025$ ,  $\mu_2 = 0,00194996$ ,  $\phi = 0,10$  en (7.9) , los valores de la asíntotas para el estado

son dadas por  $X_{1max} = 316800000$ ;  $X_{2max} = 16246487107,42$ , aplicando el logaritmo e transformación,  $\log(X_{1max}) = 8,5091$ ,  $\log(X_{2max}) = 10,21$ . Como puede ver en Fig. 7.2 , la población de ( $M_\phi$ ) es mayor la población de ( $M$ ) porque el tiempo de vida es diferente, como se puede ver en la Table 7.2 . Estos valores asintóticos de ( $M$ ) y ( $M_\phi$ ) (el estado) se consideran normales en un adulto sano (libre de infección).

### 7.2.3. Aplicación

Sumando la entrada de control  $u(t)$ , el término de difusión  $\frac{dW(t)}{dt}$ , asumiendo las condiciones para su existencia [109], y el enfoque RS, el sistema dinámico (7.8) toma la forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mu_1 - \phi & 0 \\ \phi & -\mu_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot u(t) + \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}} \cdot \begin{pmatrix} dW_1(t) \\ dW_2(t) \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

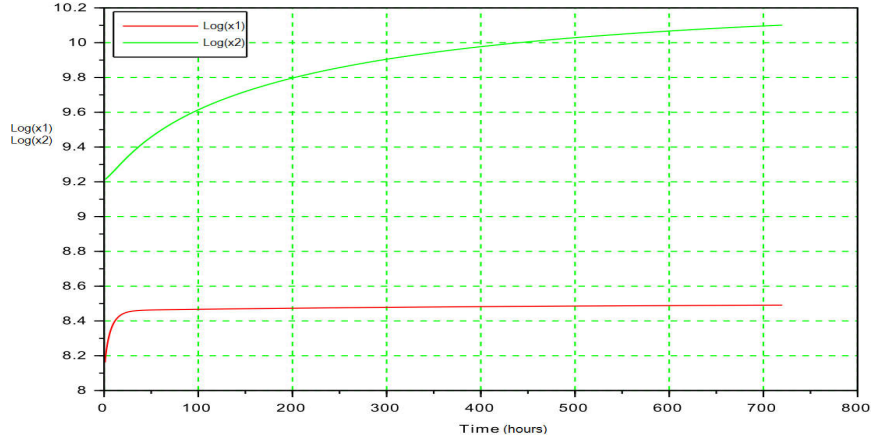


Figura 7.2: Gráfica del estado de Monocitos  $x_1(t)$  y Macrófagos  $x_2(t)$  con condiciones iniciales  $x_{01}, x_{02}$  en estado normal

Cuadro 7.1: Valores de los parámetros en el modelo.

Parámetro	Descripción	Valor	Referencias
$\lambda$	Índice de prod de $(M), x_1(t)$	$396 \times 10^5 \text{cell/h}$	[119]
$1/\mu_1$	Tiempo promedio de vida de $(M), x_1(t)$	8-72h	[119] [120]
$1/\phi$	Tiempo de paso $(M), x_1(t)$ para $M\phi, x_2(t)$ .	8-12h	[121]
$1/\mu_2$	Tiempo promedio de vida de $x_2, M\phi$	336-71080h	[120]

Aplicando el control óptimo RS a las ecuaciones del sistema de seguimiento para el problema de seguimiento (4.8), (4.9) al sistema no lineal (7.11) las siguientes ecuaciones son obtenidas:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\mu_1 - \phi & 0 \\ \phi & -\mu_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las ecuaciones de control están dadas por:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= -\frac{1}{2}[P_{11}(t)[x_1(t) - A_{s1}] + P_{12}(t)[x_2(t) - A_{s2}]], \\ u_2(t) &= -\frac{1}{2}[P_{21}(t)[x_1(t) - A_{s1}] + P_{22}(t)[x_2(t) - A_{s2}]]. \end{aligned} \quad (7.12)$$

donde los componentes de la matriz simétrica  $P(t)$  son la solución de:

$$\begin{aligned} \dot{P}_{11}(t) &= -\frac{1}{2}[P_{11}^2(t) + P_{12}^2(t)] - \frac{1}{\gamma^2}[P_{11}^2(t) + P_{12}^2(t)] + 2(\mu_1 + \phi)P_{11}(t) \\ &\quad - 2\phi P_{21}(t) - 2q_{11}(t), \\ \dot{P}_{12}(t) &= \mu_2 P_{12}(t) + P_{12}(t)(\mu_1 + \phi) + P_{22}(t)\phi + P_{11}P_{21}(t) + P_{12}(t)P_{22}(t) - \\ &\quad \frac{1}{\gamma^2}[P_{11}(t)P_{21}(t) + P_{12}(t)P_{22}(t)], \\ \dot{P}_{22}(t) &= P_{12}^2(t) + P_{22}^2(t) - 2\mu_2 P_{22}(t) - \frac{1}{\gamma^2}[P_{21}^2(t) + P_{22}^2(t)] - 2q_{22}(t). \end{aligned} \quad (7.13)$$

Las condiciones iniciales para  $\dot{P}_{ij}(t)$  son:  $P_{11}(0) = 2, P_{12}(0) = -1, P_{22}(0) = 2$ . Donde la matriz  $P(t_0)$  es definida positiva. El sistema de ecuaciones

(7.11), (7.12), (7.13) son simulados en Scilab para unos valores multiplicando la tasa de producción de  $(M_\phi)$ , estos son  $(\lambda)$ , los cuales están considerando que producen un estado no saludable en el ser humano:  $1,5\lambda, 1,2\lambda, \lambda, 0,8\lambda, 0,5\lambda$  y algunos valores del parámetro  $\epsilon$  que aumentan o disminuyen la intensidad del ruido en el proceso. La simulación se inició con respecto al tiempo final  $T = 720h = 30días$ , según [122].

Cuadro 7.2: Valores de los errores  $err_1$ ,  $err_1 \%$ ,  $err_2$ ,  $err_2 \%$  Variables de estado,  $J$ ,  $J_2$  y  $\lambda_1$  con control RS para  $0,5\lambda$ , para algunos valores del término de difusión  $\epsilon$ .

$\epsilon$	$err_1$	$err_1 \%$	$err_2$	$err_2 \%$	$J$	$J_2$	$\lambda_1$
0,01	23983474	7,5705	14362035	0,0884	3,2008	$1,289 \times 10^{19}$	1151,8241
0,1	23983064	7,5704	14361269	0,0883	3,1973	$1,289 \times 10^{19}$	1153,3433
1	23987039	7,5716	14356489	0,0883	3,1969	$1,289 \times 10^{19}$	1144,126
10	23987039	7,5716	14356489	0,0883	3,1969	$1,289 \times 10^{19}$	1156,5089
100	24019198	7,5818	14398146	0,0886	3,196	$1,289 \times 10^{19}$	1147,3401
1000	23845355	7,526	14140473	0,0870	3,1971	$1,289 \times 10^{19}$	1157,118

Cuadro 7.3: Valores de los errores  $err_1$ ,  $err_1 \%$ ,  $err_2$ ,  $err_2 \%$  Variables de estado,  $J$ ,  $J_2$  y  $\lambda_1$  con control RS para  $0,8\lambda$ , para algunos valores del término de difusión  $\epsilon$ .

$\epsilon$	$err_1$	$err_1 \%$	$err_2$	$err_2 \%$	$J$	$J_2$	$\lambda_1$
0,01	9592896,3	3,0280	5744421,3	0,0353	3,0925	$1,249 \times 10^{19}$	1135,9779
0,1	9593107,5	3,0281	5744466,4	0,0353	3,0919	$1,249 \times 10^{19}$	1138,6441
1	9591423,8	3,0275	5740704,2	0,035	3,0918	$1,249 \times 10^{19}$	1129,4185
10	9578004,9	3,0233	5722722,8	0,0352	3,0918	$1,249 \times 10^{19}$	1133,351
100	9575046,9	3,0224	5778504,8	0,0355	3,091	$1,249 \times 10^{19}$	1131,8022
1000	9418037,7	2,9728	5500934,9	0,0338	3,0917	$1,249 \times 10^{19}$	1134,0604

Cuadro 7.4: Valores de los errores  $err_1$ ,  $err_1 \%$ ,  $err_2$ ,  $err_2 \%$  Variables de estado,  $J$ ,  $J_2$  y  $\lambda_1$  con control RS para  $1\lambda$ , para algunos valores del término de difusión  $\epsilon$ .

$\epsilon$	$err_1$	$err_1 \%$	$err_2$	$err_2 \%$	$J$	$J_2$	$\lambda_1$
0,01	56,912317	0,0008	79,883249	0,0000	3,0583	$1,235 \times 10^{19}$	1123,1057
0,1	1408,1118	0,0028	1258,143	0,0000	3,0583	$1,235 \times 10^{19}$	1124,5103
1	6284,9977	0,0098	7656,4408	0,0001	3,0583	$1,235 \times 10^{19}$	1120,1942
10	6754,3784	0,0286	14698,479	0,0006	3,0583	$1,235 \times 10^{19}$	1129,9817
100	1812,1212	0,0804	10254,078	0,0019	3,0582	$1,235 \times 10^{19}$	1129,7785
1000	138513,87	0,2689	115382,17	0,0057	3,0583	$1,235 \times 10^{19}$	1122,6477



Cuadro 7.5: Valores de los errores  $err_1$ ,  $err_1 \%$ ,  $err_2$ ,  $err_2 \%$  Variables de estado,  $J$ ,  $J_2$  y  $\lambda_1$  con control RS para  $1,2\lambda$ , para algunos valores del término de difusión  $\epsilon$ .

$\epsilon$	$err_1$	$err_1 \%$	$err_2$	$err_2 \%$	$J$	$J_2$	$\lambda_1$
0,01	9593652,2	3,0282	5744322,9	0,0353	3,0546	$1,234 \times 10^{19}$	1121,9892
0,1	9594335,9	3,0285	5747045,2	0,0353	3,0540	$1,234 \times 10^{19}$	1123,6515
1	9599061,3	3,0300	5750299,7	0,0353	3,0540	$1,234 \times 10^{19}$	1132,4374
10	9575816	3,0226	5725556,6	0,0352	3,0539	$1,234 \times 10^{19}$	1127,2845
100	9509840,9	3,0018	5702373,7	0,0350	3,0541	$1,234 \times 10^{19}$	1126,8219
1000	9663936	3,0504	5900649,2	0,0363	3,0548	$1,234 \times 10^{19}$	1128,9486

Cuadro 7.6: Valores de los errores  $err_1$ ,  $err_1 \%$ ,  $err_2$ ,  $err_2 \%$  Variables de estado,  $J$ ,  $J_2$  y  $\lambda_1$  con control RS para  $1,5\lambda$ , para algunos valores del término de difusión  $\epsilon$ .

$\epsilon$	$err_1$	$err_1 \%$	$err_2$	$err_2 \%$	$J$	$J_2$	$\lambda_1$
0,01	23983157	7,5704	14361841	0,0883	3,1061	$1,252 \times 10^{19}$	1146,4183
0,1	23982178	7,5701	14360000	0,0883	3,1026	$1,252 \times 10^{19}$	1127,6445
1	23975897	7,5681	14358752	0,0883	3,1023	$1,252 \times 10^{19}$	1134,5117
10	23972085	7,5669	14331596	0,0882	3,1021	$1,252 \times 10^{19}$	1131,2256
100	23966102	7,5650	14331596	0,0882	3,1021	$1,252 \times 10^{19}$	1131,2256
1000	23932333	7,5543	14435810	0,088	3,102	$1,252 \times 10^{19}$	1136,727

En las tablas siguientes, puede ver los valores de los errores  $e_1$ ,  $e_1 \%$ ,  $e_2$ ,  $e_2 \%$ , y la función de criterio de costo exponencial cuadrático  $J$ , y  $J_2$  para ser minimizado. Además, los valores del nivel de atenuación  $\lambda_1$  al-

canzar el signo de igualdad en la restricción para el problema de control sub óptimo híbrido  $H_2/H_\infty$ . Donde  $e_1 = |A_{s1} - x_1(T)|$ ; en la misma forma para  $e_2$ ; la transformación del logaritmo se aplica para tener la mejor apreciación en los gráficos, haciendo una pequeña escala. Columnas de error porcentual  $e_1 \%$ ,  $e_2 \%$  se calculan como el cociente de los valores de error y los valores asintóticos ( $A_s$ ).

De acuerdo a las ecuaciones (7.2), (7.3) y (7.4), las matrices  $h, h_\infty$  y  $B_1, B_\infty$ , toman la forma:  $h = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $h_\infty = B_\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Los valores de  $\lambda_1$  en las Tablas 3-7 hacen que alcancen la igualdad en  $J_\infty(u, \lambda_1)$  en (7.6). Si  $\lambda_2 < \lambda_1$ , entonces  $u = u(x(t))$  es la solución del problema RS no restringido  $J_\infty(u, \lambda_1) > 0$ . Si  $\lambda_3 > \lambda_1$ , entonces  $u = u(x(t))$  es la solución del problema RS restringido  $J_\infty(u, \lambda_1) < 0$ . Se han obtenido niveles de atenuación para cada valor del coeficiente de difusión  $\epsilon$  y variaciones en  $\lambda$ , la gama de producción de ( $M$ ). El efecto de la entrada de control óptimo RS con seguimiento está en ventaja porque cuando se aplica la entrada de control, el estado alcanza los valores asintóticos (estado correcto) para todos los valores de la tasa de producción. Los valores del costo cuadrático exponencial  $J$  (control óptimo RS) para diferentes valores

de  $\epsilon$  y coeficientes de  $\lambda$  tienen pequeños cambios, en el rango de milésimas. Mientras que los valores del criterio  $J_2$  correspondientes al enfoque del control óptimo RS  $H_2$  son grandes. Lo anterior es comprensible porque  $J_2$  contiene la energía gastada por el control RS para mantener los valores óptimos de los estados y como los valores de los estados están en orden de miles de millones, la energía de control tiene esta escala. Por otro lado, los valores del criterio de costo RS  $J$  se mantienen pequeños, con pocas variaciones.

Se ilustra el rendimiento del control óptimo RS  $H_\infty$ , el nivel de atenuación  $\lambda_1$  ( La restricción  $H_\infty$  se mantiene con el signo de igualdad para cada valor del parámetro del término de difusión  $\epsilon$  y la tasa de producción de monocitos,  $\lambda$ . El rendimiento del control sub óptimo RS híbrido  $H_2/H_\infty$  con el nivel de atenuación  $\lambda_1$  ha demostrado ser eficaz para todos los valores del parámetro de difusión  $\epsilon$  y la tasa de producción de Monocitos,  $\lambda$ .

El problema de optimización restringido se satisface para los valores  $\lambda_2$ , con  $\lambda_2 > \lambda_1$  en (7.7) y el problema de optimización sin restricciones está satisfecho para  $\lambda_3$ , con  $\lambda_3 < \lambda_1$ .

La Fig. 7.3 ilustra el comportamiento del estado  $(\log(M)), \log(M_\phi)$  cuando  $\epsilon = 10, 1, 2\lambda$ .

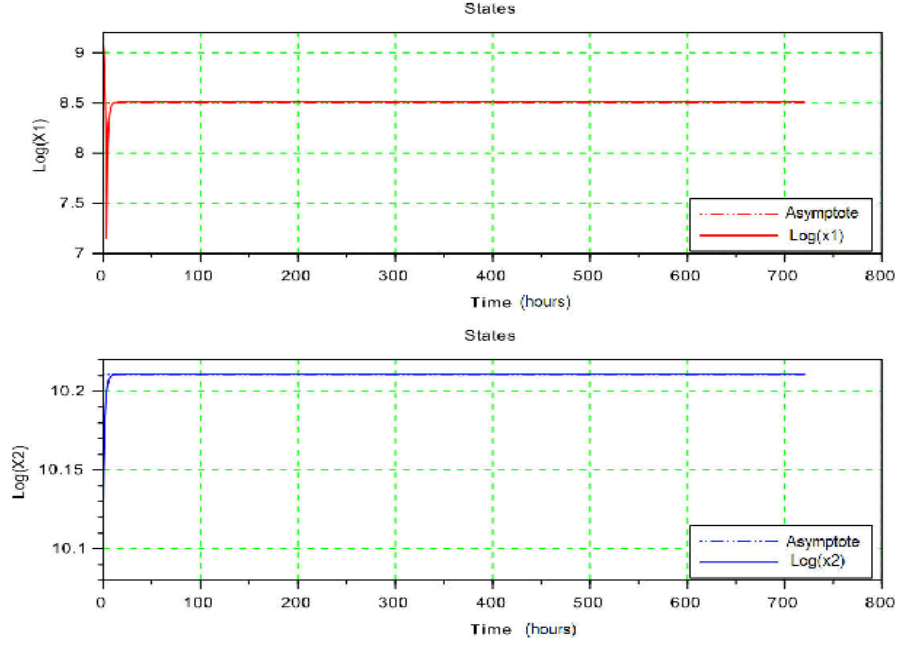


Figura 7.3: Graphic of states  $\log(M)$  and  $\log(M_\phi)$  with  $\epsilon = 10$ , and  $1, 2\lambda$ .

El efecto de la entrada de control óptimo RS con seguimiento es la ventaja porque cuando se aplica la entrada de control, el estado alcanza los valores asintóticos (estado correcto) para todos los valores de la tasa de producción.

Conclusiones: Los resultados obtenidos de los experimentos han demostrado que la entrada de control RS normaliza el nivel de monocitos y macrófagos, alcanzando valores asintóticos en poco tiempo (menos de 24 h) utilizando un criterio exponencial cuadrático  $J$ . Según los resultados del problema de control ptimo RS  $H_2$ , los valores de los criterios  $J_2$

y  $J$  han demostrado que la energía gastada por el control RS es grande, de acuerdo con las dimensiones del proceso simulado, lo que significa que el rendimiento requerido se ha logrado en esta propuesta. Los resultados obtenidos de la simulación del problema de control RS  $H_\infty$  con el nivel de atenuación  $\lambda_1$ , han demostrado que el valor  $\lambda_1$  para la restricción  $H_2/H_\infty$  se mantiene con el signo de igualdad para todos los valores de los parámetros de difusión  $\epsilon$  y los cambios en el rango de producción de monocitos . El problema de optimización restringido y sin restricciones propuesto se ha satisfecho por los valores  $\lambda_2$ , con  $\lambda_2 > \lambda_1$  y  $\lambda_3$ , con  $\lambda_3 < \lambda_1$ . El problema de control sub óptimo RS híbrido  $H_2/H_\infty$  presenta un mejor rendimiento al encontrar los valores de  $\lambda_1$  que corresponden a la formulación del problema de optimización  $H_2$  sujeto a la restricción  $J_\infty$ .

# Capítulo 8

## Conclusiones

Se han obtenido matemáticamente las ecuaciones del filtrado sub-óptimo RS para sistemas polinomiales de tercer grado con ruidos blancos Gaussianos. Un criterio exponencial cuadrático fue minimizado, usando una función valor cuadrática como solución para las correspondientes ecuaciones Hamilton-Jacobi-Bellman, y usando series de Taylor para linealizar la forma polinomial de tercer grado de la ecuación de estado. Las simulaciones numéricas son realizadas para comparar la eficacia de los algoritmos del filtro RS obtenido contra los algoritmos de filtrado de tercer grado y el filtro de Kalman Bucy extendido, a través de la comparación de los valores de la exponencial media-cuadrada. También se obtuvieron las ecuaciones del controlador óptimo RS para sistemas polinomiales lineales en donde en las ecuaciones de estado y observación el término de difusión está multi-

plicándose por un parámetro de intensidad.

Se presenta la solución del problema del controlador óptimo RS para sistemas estocásticos polinomiales de primer grado en presencia del ruido blanco Gaussiano en las ecuaciones del estado y observaciones, la función de costo exponencial-cuadrático fué minimizado escalando el parámetro de intensidad  $\epsilon$  multiplicando al término de difusión. El principio de separación y las soluciones a los problemas de control y filtrado óptimos RS fueron utilizados para obtener las ecuaciones del controlador óptimo RS. Simulaciones numéricas son conducidas haciendo una comparación entre el controlador óptimo RS y el controlador convencional LQ para sistemas lineales, calculando los valores del criterio de costo exponencial-cuadrático para diferentes valores de la escala del parámetro de intensidad  $\epsilon$ . Los resultados de la simulación muestran significantes ventajas a favor del diseño del controlador RS, en particular, para valores grandes del parámetro  $\epsilon$ .

También se presentan las soluciones óptimas de los problemas de control óptimo estocástico para sistemas polinomiales de segundo y tercer grado con presencia del ruido blanco Gaussiano en las ecuaciones de estado y observaciones, la función de criterio exponencial cuadrático fué minimizada y el parámetro de intensidad  $\epsilon$  multiplica al ruido blanco, usando las funciones valor cuadráticas como soluciones de las correspondientes ecua-

ciones de Hamilton-Jacobi-Bellman. Simulaciones numéricas fueron hechas haciendo una comparación entre el regulador RS y el regulador óptimo polinomial, comparando el criterio exponencial cuadrático minimizado en ambos métodos. Los resultados de la simulación muestran ventaja en favor de las ecuaciones del control RS para sistemas de segundo y tercer grado para grandes valores de parámetro  $\epsilon$  dependiendo de los valores del criterio en el tiempo final con respecto al control óptimo polinomial.



## Capítulo 9

### Trabajo futuro

Se trabajará con el problema control estocástico sub óptimo RS híbrido  $H_2/H_\infty$  para sistemas polinomiales de segundo grado.

# Bibliografía

- [1] Alcorta Garcia Ma.Aracelia, Basin. Michael V., Acosta Sánchez Yazmin G., Risk-Sensitive Approach Optimal Filtering and Control for Linear Stochastic Systems, que fue presentado en The Third International Conference on Innnotivate Computing, Information and Control, en Dalian China del 18-20 de junio del 2008.
- [2] Alcorta Garcia Ma.Aracelia, Basin Michael V., Maldonado Ortiz Juan J., Anguiano Rostro Sonia G., Sub-Optimal Risk-sensitive Filtering for Third Degree Polynomial Stochastic Systems, enviado para su publicación en Revista Internacional ICICIEL.
- [3] Basin M. V. and M.A Alcorta-Garcia, Optimal Filtering and Control for Third Degree Polynomial Systems. *Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems*, **10**, 663–680, 2003.
- [4] Basin M. V. and M.A Alcorta-Garcia, Optimal Filtering for Bilin-

ear Systems and its Application to Terpolymerization Process State. Proc. IFAC 13th. Symposium System Identification-SYSID-2003.467–472, 2003.

- [5] V. S. Pugachev and I.N. Sinitsyn, Stochastic Systems Theory and Applications. World Scientific, Singapore, 2001.
- [6] S. Yau S.-T., Finite-Dimensional Filters with Nonlinear Drift. A Class of Filters Including Both Kalman-Bucy and Benes Filters. J. Math. Systems Estimation and Control, pp 181-203, 1994.
- [7] Fleming W.H. et al, Robust limits of Risk Sensitive NonLinear Filters. Math. Control Signals and Systems, **14**, pp. 109–142, 2001.
- [8] Fleming W.H., W.M.McEneaney, Risk-sensitive control and differential games, Springer Lecture Notes in Control and Info. Sci. 184, Springer-Verlag, New York, pp. 185-197, 1992.
- [9] Jazwinski Andrew H., Stochastic process and filtering theory, Academic Press, New York, 1970.
- [10] Khalil H. K., Nonlinear Systems, Third Edition, Prentice Hall, New Jersey 1996.

- [11] McEneaney W. M., Robust  $H^\infty$  filtering for nonlinear systems. *Systems and Control Letters*, 315–325, 1998.
- [12] Mortensen R. E., Maximum Likelihood Recursive Nonlinear Filtering. *J. Optim. Theory Appl.* pp. 386–394, 1968.
- [13] E.G. Albrekht On the optimal stabilization of nonlinear systems. *J. Appl. Math. Mech.* **25**, 1254–1266, 1962.
- [14] M. A. Alcorta Garcia, M.V. Basin, Y. G. Acosta Snchez, Risk-sensitive Approach to Filtering and Control for Linear Stochastic Systems, approved for to appear in *International Journal of Innovative Computing Information and Control*, Vol 5, No. 6, pp. 1599-1613, 2009.
- [15] J. A. Ball, J. W. Helton,  $H^\infty$  Control for nonlinear plants: connections with differential games, Proc. 28 th IEEE Conf. Dec. Control, Tampa Fl, pp 956–962, 1989.
- [16] T. Basar and P. Bernhard,  $H^\infty$  Optimal Control and Related Minimax Design Problems. Birkhaäuser, Boston, 1991.
- [17] P. Dai Pra, A stochastic control approach to reciprocal diffusion processes, *Applied Math. Optim.*, **23**, 313-329, 1991.

- [18] H. Dym , H. P. McKean, Fourier Series and Integrals,*Academic Press*, New York, 1975.
- [19] Donsker M. D. and S. R. S. Varadhan, Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time, I, II, III, *Comm. Pure Appl. Math.*, 28, pp. 1-45, 279-301, 1975; 29, pp. 389-461, 1976.
- [20] W. H. Fleming, W.M.McEneaney, Risk-sensitive control on an infinite time horizon", *SIAM, Control and Opt.*, Vol. 33, No. 6, pp. 1881–1915, 1995.
- [21] O.A. Ladyženskaja , V.A. Solonnikov,N.N. Ural'ceva, Newblock Linear and Quasi-Linear Equations for Parabolic Type, American Mathematical Society,Providence, RI, 1968.
- [22] Fleming W.H., W.M.McEneaney,Risk-sensitive control and differential games", Springer Lecture Notes in Control and Info. Sci. 184, Springer-Verlag, New York, pp. 185-197, 1992.
- [23] Fleming W. H. and Rishel R. W.,Deterministic and Stochastic Optimal Control, Springer Verlag, New York, USA, (1975).
- [24] B. A. Francis, A Course in  $H^\infty$  Control Theory, Lecture Notes in Control and Information Sciences 88, *Springer-Verlag*, New York, 1987.

- [25] K. Glover, J. C. Doyle, State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an  $H^\infty$ -norm bound and relations to risk sensitivity, *Systems Control Lett.*, 11, pp. 167–172, 1998.
- [26] F. Guerra and L.M. Morato , Quantization of dynamical systems and stochastic control theory, *Phys. Rev. D.* **27**, 1774-1786, 1993.
- [27] A. Isidori,  $H^\infty$  Control via measurement feedback for affine nonlinear systems. Internal paper, Dept. Systems Science and Mathematics, Washington University, St, Louis, 1992.
- [28] A. Isidori, Robust regulation of nonlinear systems. MTNS Abstracts, Kobe, Japan, 1991.
- [29] D. H. Jacobson, Optimal stochastic linear systems with exponential criteria and their relation to deterministic differential games, *IEEE Trans. Automat. Control*, AC-18, pp.124–131, 1973.
- [30] M. James, A partial differential inequality for dissipative nonlinear systems, *Systems and Control Letters*.
- [31] M. R. James, Asymptotic analysis of nonlinear stochastic risk-sensitive control and differential games, *Math. Control Signals Systems*, 5, pp. 401–417, 1992.

- [32] C. S. Jeong, E. Yaz, A. Bahakeem and Y. Yaz, Nonlinear observer design with general criteria, *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, vol. 2, pp. 693–704, 2006.
- [33] Kalman R. E. and Bucy R. S., New results in linear filtering and prediction theory, ASME Trans., Part D (J. of Basic Engineering), **83**, (1961), 95-108.
- [34] Kwakernaak H. and Sivan R., Linear Optimal Control Systems, Wiley-Interscience, New York, USA, (1972).
- [35] D. J. N. Limebeer, B. D. O. Anderson, P. Khargonekar, M. Green: A game theoretic approach to  $H^\infty$  control for time varying systems. Proceedings of the International Symposium on the Mathematical Theory of Networks and Systems, Amsterdam, Netherlands, 1989.
- [36] McEneaney W. M., Robust  $H_\infty$  filtering for nonlinear systems. Systems and Control Letters, 315–325, 1998.
- [37] W. M. McEneaney, Connections between risk-sensitive stochastic control, differential games and  $H_\infty$  control: The non linear case”. Doctoral Thesis, Brown University, Providence, RI, USA(1993).

- [38] W. McEneaney, Robust/game-theoretic methods in filtering and estimation, Proc. DARPA Symposium on Advances in Enterprise Control, 1999.
- [39] E. Nelson, quantum Fluctuations, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., USA, 1985.
- [40] L. S. Pontryagin, et al. The Mathematical Theory of Optimal Processes. Wiley-Interscience, New York, USA, 1962.
- [41] T. Runolfsson, Stationary Risk-sensitive LQG control and its relation to LQG and  $H^\infty$ -control, in Proc. 29th. IEEE CDC, Honolulu, HI, pp. 1018–1023, Dec.1990.
- [42] T. Runolfsson, The equivalence between infinite horizon control of stochastic systems with exponential-of-integral performance index and stochastic differential games, Technical report JHU/ECE 91–107, Johns Hopkins University, 1991.
- [43] P. Whittle, A risk-sensitive maximum principle, *Syst. Control Lett.*, 15, pp. 183–192, 1990.
- [44] P. Whittle, Risk-Sensitive Optimal Control” John Wiley and Sons, New York, USA, 1990.



- [45] Albrekht E.G. On the optimal stabilization of nonlinear systems. J. Appl. Math.Mech.**25**, 1254–1266, 1962.
- [46] Basin M.V., Calderón Alvarez D., Optimal controller for uncertain stochastic polynomial systems, Journal of The Franklin Institute, DOI: 10.1016/j.jfranklin.2008.08.004, 2008.
- [47] Basin M.V., J. Perez and R. Martinez-Zuniga, Optimal filtering for nonlinear polynomial systems over linear observations with delay, *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, vol. 2, pp. 357–370, 2006.
- [48] Donsker M. D. and S. R. S. Varadhdan, Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time, I, II, III, Comm. Pure Appl. Math., 28, pp. 1-45, 279-301, 1975; 29, pp. 389-461, 1976.
- [49] Fleming W.H. et al, Robust limits of risk-sensitive nonlinear filters. Math. Control Signals and Systems, **14**, pp. 109-142, 2001.
- [50] Fleming W.H., W.M.McEneaney, Risk-sensitive control on an infinite time horizon, SIAM, Control and Opt. Vol. 33, No. 6, pp. 1881-1915, 1995.

- [51] Fleming W.H., W.M.McEneaney, Risk-sensitive control and differential games, Springer Lecture Notes in Control and Info. Sci. 184, Springer-Verlag, New York, pp. 185-197, 1992.
- [52] Fleming W.H., R. W. Rishel, Deterministic and Stochastic Optimal Control. Springer, New York, USA, 1975.
- [53] Glover K., J. C. Doyle, State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an  $H^\infty$ -norm bound and relations to risk sensitivity, Systems Control Lett., 11, pp. 167-172, 1998.
- [54] Jacobson D. H., Optimal Stochastic linear systems with exponential criteria and their relation to deterministic differential games, IEEE Trans. Automat. Control, AC-18, pp.124-131, 1973.
- [55] Kwakernaak H., R. Sivan, Linear Optimal Control Systems. Wiley, New York, USA, 1972.
- [56] McEneaney W. M., Max-Plus eigenvector representations for solution of nonlinear  $H_\infty$  problems: error analysis. SIAM J. Control and Opt., **43**, pp. 379–412, 2004.
- [57] W. McEneaney, Robust/game-theoretic methods in filtering and estimation, Proc. DARPA Symposium on Advances in Enterprise Control, 1999.

- [58] McEneaney W. M., "Connections between risk-sensitive stochastic control, differential games and  $H_\infty$  control: The non linear case". Doctoral Thesis, Brown University, Providence, RI, USA, (1993).
- [59] Pontryagin L.S., et al. The Mathematical Theory of Optimal Processes. English Transl. Interscience, New York, USA, 1962.
- [60] Sira-Ramirez H., Márquez R., Rivas Echeverría F., Llanes-Santiago O., "Automática y Robótica: Control de sistemas no lineales", Pearson, Madrid, pp. 14, 2005.
- [61] Whittle P., A risk-sensitive maximum principle: The case of the imperfect state information, IEEE Trans. Automat. Control, 36, pp. 793-801, 1991.
- [62] Zhang, H., M.V. Basin and M. Skliar, Optimal state estimation for continuous, stochastic, state-space system with hybrid measurements, *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, vol. 2, pp. 863–874, 2006.
- [63] María Aracelia Alcorta García, Sonia Guadalupe Anguiano Rostro. Optimal Risk-sensitive Filtering for Second Degree Stochastic Systems. ICNPAA 2010, San Jose Dos Campos, Brasil.

- [64] María Aracelia Alcorta García, Michael V. Basin, Sonia Guadalupe Anguiano Rostro. Optimal Risk-Sensitive Regulator and Filtering For Continuous Stirred Tank Reactor. Congreso Internacional Sobre Innovación y Desarrollo Tecnológico 2010, Cuernavaca, Morelos.
- [65] María Aracelia Alcorta García, Michael V. Basin, Sonia Guadalupe Anguiano Rostro. Risk-Sensitive Control Design and Application to Monoaxial Satellite. IEEE ICIT 2010, Chile.
- [66] María Aracelia Alcorta García, Michael V. Basin, Sonia Guadalupe Anguiano Rostro. Optimal Risk-Sensitive Control for Bilinear Stochastic Systems. IEEE Multi-Conference on Systems and Control, Rusia.
- [67] María Aracelia Alcorta García, Michael V. Basin, Sonia Guadalupe Anguiano Rostro, Mauricio Torres Torres. Optimal Risk-Sensitive Controller for First Degree Stochastic Polynomial Systems. 6th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control. 2009, Toluca, México.
- [68] María Aracelia Alcorta García, Michael V. Basin, Sonia Guadalupe Anguiano Rostro, Juan José Maldonado. Sub-Optimal Risk-Sensitive Filtering Design for Polynomial Stochastic Systems. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009, USA.

- [69] María Aracelia Alcorta García, Michael V. Basin, Sonia Guadalupe Anguiano Rostro, Juan José Maldonado. Sub-Optimal Filtering for Third Degree Polynomial Stochastic Systems. IEEE Multi-Conference on Systems and Control, 2009, Rusia.
- [70] María Aracelia Alcorta García, Michael V. Basin, Sonia Guadalupe Anguiano Rostro. Control Óptimo Risk-Sensitive Para Sistemas Polinimiales de Tercer Grado. VI Encuentro de la Participación de la Mujer en la Ciencia, 2009, Guanajuato, México.
- [71] María Aracelia Alcorta García, Michael V. Basin, Sonia Guadalupe Anguiano Rostro. Control Óptimo Risk-Sensitive Para Sistemas Polinomiales Bilineales. XLI Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, 2008, México.
- [72] María Aracelia Alcorta García, Michael V. Basin, Sonia Guadalupe Anguiano Rostro, Juan José Maldonado. Sub-Optimal Filtering for Third Degree Polynomial Stochastic Systems XLI Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, 2008, México.
- [73] María Aracelia Alcorta García, Michael V. Basin, Sonia Guadalupe Anguiano Rostro. Control Óptimo Risk-Sensitive Para Sistemas Polin-

imiales Bilineales. V Encuentro de la Participación de la Mujer en la Ciencia, 2008, Guanajuato, México.

- [74] María Aracelia Alcorta García, Michael V. Basin, Sonia Guadalupe Anguiano Rostro, Juan José Maldonado. Sub-Optimal Filtering for Third Degree Polynomial Stochastic Systems ICIC Innovative Computing Information and Control, 2008, Japón.
- [75] Albrekht E. G., (1962). On the Optimal Stabilization of Nonlinear Systems. J. Appl. Math.Mech.,**25**. Pp.1254-1266.
- [76] Jeong C.S., Yaz E., Bahakeem A and Yaz Y., (2006). Nonlinear observer design with general criteria. International Journal of Innovative Computing, Information and Control. **2**. Pp. 693-704.
- [77] Bellman R.,(2003). Dynamic Programming, Dover, Princeton, New Jersey.
- [78] Pontryagin L. S., (1962). The Mathematical Theory of Optimal Processes, Wiley Interscience.
- [79] Jacobson D. H., (1973). Optimal stochastic linear systems with exponential criteria and their relation to deterministic differential games. IEEE Trans. Automat. Control. **AC-18**. Pp. 124-131.

- [80] Dai Pra P., (1991). A stochastic control approach to reciprocal diffusion processes. *Applied Mathematics and Optimization*. Pp. 313-329.
- [81] Nelson E., (1985). *Quantum Fluctuations*. Princeton Univ. Press.
- [82] James M. R., (1992). Asymptotic analysis of nonlinear stochastic risk-sensitive control and differential games. *Control Signals Systems*. **5**. Pp. 401-417.
- [83] Whittle P., (1990). A risk-sensitive maximum principle. *Systems Control Letters*. **15**. Pp. 183-192.
- [84] Whittle P., (1990). *Risk-Sensitive Optimal Control*. John Wiley and Sons, New York.
- [85] Fleming W. H., McEneaney W. M.. (1995). Risk-sensitive control Risk-sensitive control on an infinite time horizon. *SIAM, Control and Opt.* **33(6)**. Pp. 1881-1915.
- [86] Runolfson T., (1990). Stationary Risk-sensitive LQG control and its relation to LQG and H-infinity control. *Decision and Control, Proceedings of 29th IEEE Conference on.***2**. Pp. 1018-1023.
- [87] Runolfsson T., (1991). The equivalence between infinite horizon control of stochastic systems with exponential-of-integral performance

index and stochastic differential games. Automatic Control. **39(8)**.  
Pp.1551-1563.

- [88] Francis B. A., (1987). A Course in  $H_\infty$  Control Theory. Lecture Notes in Control and Information Science, Springer-Verlag. **88**.
- [89] Dym H., McKean H. P., (1975). Fourier Series and Integrals. Academic Press.
- [90] Fleming W. H. and McEneaney W. M., (1992). Risk-sensitive control and differential games. Springer Lecture Notes in Control and Info.**Sci.** **184**. Pp. 185-197.
- [91] McEneaney W. M., (1993). Connections between risk-sensitive stochastic control, differential games and  $H_\infty$  control: The non-linear case. Doctoral Thesis, Brown University.
- [92] Alcorta-García M. A., Nava Alemán Y., Elizondo Villarreal N., Cortés Martínez F., Torres López E., Anguiano Rostro S. G.,(2015). Optimal Control Effect into Innate Immune System, IEEE-ICMEAE 2015, Cuernavaca Morelos, México.
- [93] Alcorta-García M. A., Nava Alemán Y., Elizondo Villarreal N., Cortés Martínez F., Torres López E., Anguiano Rostro S. G., Garza Garza L.



- G., (2017). Effect of optimal linear control in human monocytes and macrophages system, Journal of Bioengineering Science.
- [94] Alcorta García M. A., Alcorta García E., Méndez Díaz S., Martínez Flores M. M., Valdez Hinojosa L. A., (2018). Non-Linear Filtering and Control With Tracking Versus PID Applied to an Electric Resistance System. IEEEEXPLORER, ICMEAE2018. pp. 165 - 170, MEXICO-13:978-1-5386-9191-5.
- [95] Alcorta-García M. A., Torres Torres M.,(2012). Optimal Risk-sensitive Controller for Second Degree Stochastic Polynomial Systems, Proceedings of IEEE-MMAR2012, Miedzyzdroje, Poland.
- [96] Alcorta-García M. A., Anguiano Rostro S. G., Nava Alemán Y., Elizondo Villarreal N., Flores Cantú H. R.,(2014). Application of Non-linear Risk-Sensitive Optimal Control Equations to Excitable Noise System, Proceedings of IEEE-MMAR 2014, Miedzyzdroje, Poland.
- [97] Jia-Sheng Song, Xiao-Heng Chang, (2020).  $H_\infty$  controller design of networked control systems with a new quantization structure. Applied Mathematics and Computation. **376**.
- [98] De Caigny J., J.F. Camino, R.C.L.F. Oliveira, P.L.D. Peres, J. Swevers, (2010). Gain-scheduled  $H_2$  and  $H_\infty$  control of discrete-time poly-

topic time-varying systems. IET Digital Library. **4(3)**, pp. 362–380.  
DOI: 10.1049/iet-cta.2008.0364

- [99] Junjie Jiao and Harry L. Trentelman and M. Kanat Camlibel, (2020).  $H_2$  and  $H_\infty$  Suboptimal Distributed Filter Design for Linear Systems.math. OC, arXiv:2002.02830v1, **14(8)**, 2020.
- [100] Parthish Kumar Paul and Jeevamma Jacob, (2020).  $H_2$  Vs  $H_\infty$  control of TRMS via output error optimization augmenting sensor and control singularities. Ain Shams Engineering Journal, Science Direct. **11(1)**, pp. 77-85.
- [101] Ali H.I. and Shareef Z. M., (2028).Full State Feedback  $H_2$  and  $H_\infty$  Controllers Design for a Two Wheeled Inverted Pendulum System, Engineering and Technology Journal, **36(10)**, Part A, pp. 1110-1121.
- [102] Basin, M., Shi, P., Calderon-Alvarez, D., (2009). Central suboptimal  $H_\infty$  filter design for nonlinear polynomial systems. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 23(10), pp. 926-939.
- [103] Basin, M., Soto, P., Calderon-Alvarez, D., (2010). Central suboptimal  $H_\infty$  controller design for linear systems with unknown parameters. In 2010 IEEE International Symposium on Intelligent Control. pp. 2462-2467.

- [104] Basin, M., Elvira-Ceja, S., Sanchez, E. N. (2010). Central suboptimal mean-square  $H_\infty$  controller design for linear stochastic systems. In 2010 IEEE International Symposium on Intelligent Control. pp. 2456-2461.
- [105] Astolfi Alessandro, Colaneri Patrizio, (2001). Trading robustness with optimality in nonlinear control. Automatica, Elsevier **37**, pp. 1961-1969.
- [106] Janeway C. A. Jr, Travers P., Walport M., et al. (2001). Immunobiology: The Immune System in Health and Disease. 5th edition. New York: Garland Science; 2001. Part V, The Immune System in Health and Disease. Available from: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/books/NBK10775/>.
- [107] Gerd Rosenkranz, (1985). Growth models with stochastic differential equations. An example from tumor immunology. Mathematical Biosciences. **75(2)**. pp. 175-186.
- [108] Teh YC, Ding JL, Ng LG, Chong SZ, (2019). Capturing the Fantastic Voyage of Monocytes Through Time and Space. Front Immunol. doi: 10.3389/fimmu.2019.00834. PMID: 31040854; PMCID: PMC6476989.

- [109] Pugachev V. S. and Sinitsyn I. N.,(2001). Stochastic Systems, World Scientific, NJ, USA.
- [110] W. McEneaney, (1999). Robust/game-theoretic methods in filtering and estimation, Proc. of the DARPA Symposium an Advances in Enterprise Control.
- [111] Fahy R. J., Doseff A. I., Wewers M. D., (1999). Spontaneous human monocyte apoptosis utilizes a caspase-3-dependent pathway that is blocked by endotoxin and is independent of caspase-1., J Immunol., **163**(4). pp. 1755-1762.
- [112] Wiktor-Jedrzejczak W. and Gordon S., (1996). Cytokine regulation of the macrophage ( $M_{\phi}$ ) system studied using the colony stimulating factor-1-deficient op/op mouse, Physiol Rev.,**76**, pp. 927-947. <https://doi.org/10.1152/physrev.1996.76.4.927>.
- [113] Sepulveda Saabedra J.,(2012). Texto Atlas de Histologia, Biologia Celular y Tisular, Mc Graw Hill, Mexico D. F..
- [114] Parihar A., Eubank T. D., and Doseff A. I., (2010). *Monocytes and Macrophages Regulate immunity through Dynamic Networks of Survival and Cell Death*, Journal of Innate Immunity, **2**(3), pp. 204-215.

- [115] Auffray C., Sieweke M. H., Geissmann F.,(2009). *Review Blood monocytes: development, heterogeneity, and relationship with dendritic cells* , Annu. Rev. Immunol.,**27**, pp. 669-692. doi: 10.1146/annurev.immunol.021908.132557.
- [116] Linker R, Gold R, Luhder F, (2009). Review Function of neurotrophic factors beyond the nervous system: inflammation and autoimmune demyelination., Crit Rev Immunol., **29(1)**, pp. 43-68.
- [117] Stewart James and Day Troy,(2015). Bio calculus, Calculus for the Life Sciences, Ed. Cengage Learning, Boston MA, USA, pp. 662-670.
- [118] Vargas De Leon Cruz,(2005). Modelo Biomatemático de la dinámica de Infección del Virus del Dengue, Revista Alternativa, **6**, pp. 1-32.
- [119] Ganz T., Leher R. I., (1995). Chapter 88. Production, distribution and fate of monocytes and macrophages, in William's Hematology, McGraw Hill, New York, pp. 875-878, **5**.
- [120] Goto Yukinobu, Hogg James C., Suwa Tatsushi, Quinlan Kevin B and Van Eede Stephan F., (2003). A novel method to quantify the turnover and release of monocytes from the bone marrow using the thymidine analog 5'-bromo-2'-deoxyuridine, Am J Physiol Cell Physiol, Cell physiolog, **285(2)**, pp. C253-C259.

- [121] Rael Eppie, (1998). Immunology Micro 3230, Adv. Immunol.  
<http://www.utep.edu/eerael/immunology.htm>.
- [122] Tak Tamar, Drylewicz Julia, Conemans Lennart, de Boer Rob J., Koenderman Leo, Borghans José A., and Tesselaar Kiki, (2017). Circulatory and maturation kinetics of human monocyte subsets in vivo. BLOOD, The Journal of the American Society of Hematology, **130(12)**. Washington, DC, USA. pp. 1474-1477.
- [123] Alcorta María Aracelia, Anguiano Sonia, Mendez Gerardo, Cortes Facundo, Elizondo nora, Torres Ernesto, Nava Yosefat, (2021). Hybrid  $H_2/H_\infty$  sub-optimal stochastic risk-sensitive control for polynomial systems of first degree. ELSEVIER, Journal of Process Control. pp. 84-91.
- [124] P. Escudero-Delgado y D. Carrión-Galarza, (2018). Expansión de un sistema de transmisión mediante LOPF-AC. INGE CUC, Vol. 14, no.2. pp. 116-125.
- [125] Louis Leithold, (1998). El Cálculo. Oxford University Press. pp. 639-642.
- [126] Pea T. Eliana, Pérez r. Aída R., Miranda Ander J., Sánchez L. José H., (2008). Modelado de un reactor químico tipo CSTR y evalu-

ación del control predictivo aplicando Matlab-Simulink. Revista IN-  
GENIERIA UC, Vol. 15, no. 3, 2008. pp. 97-112. Universidad de  
Carabobo, Valencia, Venezuela.